

Mémoire présenté à CERGY PARIS UNIVERSITÉ pour  
l'obtention du

**DIPLÔME D'HABILITATION À DIRIGER DES  
RECHERCHES**

Discipline : Mathématiques

par

**Adrien SAUVAGET**

---

**Géométrie énumérative des surfaces plates et  
courbes spins**

---

Soutenu le 22 avril 2024 devant le jury composé de :

Gaëtan Borot	Humboldt Universität zu Berlin	Rapporteur
Bertrand Deroin	Cergy Paris Université	Examineur
Penka Georgieva	Sorbonne Université	Examinatrice
Rahul Pandharipande	ETH Zürich	Examineur
Sergey Shadrin	Universiteit van Amsterdam	Rapporteur
Armen Shirikyan	Cergy Paris Université	Examineur
Anton Zorich	Université Paris Cité	Rapporteur

Laboratoire Analyse Géométrie  
Modélisation (UMR 8088)  
2 av. Adolphe Chauvin  
95 302 Cergy-Pontoise CEDEX

*“Cette fois-ci au contraire j’avais éprouvé le plaisir trop reposant de faire la montée d’un hôtel connu, où je me sentais chez moi, où j’avais accompli une fois de plus cette opération toujours à recommencer, plus longue, plus difficile que le retournement de la paupière, et qui consiste à poser sur les choses l’âme qui nous est familière au lieu de la leur qui nous effrayait.”*

Marcel Proust, *Sodome et Gomorrhe*.

## Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Dimitri Zvonkine et Bertrand Deroin pour leur soutien enthousiaste aux différentes étapes de mon parcours mathématique. De directeur de thèse à collègue, Dimitri toujours été un interlocuteur enthousiaste pour discuter des développements de mes travaux. Bertrand, que j'ai rejoint à Cergy-Pontoise lors de mon entrée au CNRS, m'a encouragé à pousser plus loin mes recherches en me proposant de nouveaux points de vue sur les espaces des modules.

Je souhaite également remercier tous les membres de mon jury. J'ai eu la chance de rencontrer Sergey Shadrin, Rahul Pandharipande et Anton Zorich très tôt dans mon parcours académique, et je leur suis grandement reconnaissant de leur intérêt pour mes travaux dès nos premières rencontres, ainsi que de leurs conseils dans l'exploration de nouveaux problèmes. Leurs écrits ont joué un rôle prépondérant dans ma compréhension et ma conception de la théorie de Teichmüller et de la géométrie énumérative. Gaëtan Borot a fait une lecture remarquablement attentive de la première version de ce mémoire. Ses commentaires ont non seulement permis d'améliorer sensiblement le texte, mais aussi de m'orienter vers plusieurs voies à étudier à partir des résultats principaux. Penka Georgieva, par ses travaux et les échanges que nous avons eues, m'a ouvert à un horizon mathématique mystérieux que j'espère vivement pouvoir explorer dans les années à venir.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement les mathématiciens et mathématiciennes avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger ces dernières années. Que nous ayons eu l'occasion d'écrire ensemble ou non, c'est au cours des nombreuses discussions avec ces collègues en France et dans le monde que se sont formés les résultats que je présente ici. J'ai essayé de rendre dans l'écriture de ce mémoire les sentiments de reconnaissance et d'enthousiasme associés à ces heures passées à travailler ensemble.

Mon dernier mot devrait aller à Virginie et Lucien, mais il ne m'en vient aucun qui contienne la joie de chaque jour passé ensemble.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-propos</b> .....	7
<b>Liste des travaux présentés</b> .....	15
<b>1. Espaces des modules de courbes et courbes spins</b> .....	17
1.1. Espace des modules de courbes et anneaux tautologiques .....	17
1.2. Courbes spins et parité .....	20
1.3. Espace des modules de courbes spins et classes signées .....	22
<b>2. Surfaces plates et multi-différentielles</b> .....	27
2.1. Espaces des modules de multi-différentielles .....	27
2.2. Surfaces plates et feuilletage d'holonomie .....	30
<b>3. Cycles associés aux surfaces plates et leurs raffinements spins</b> .....	35
3.1. Classes des strates .....	35
3.2. Relations tautologiques de type Hodge .....	36
3.3. Cycles de double ramification .....	37
3.4. Intégrales de classes $\psi$ .....	42
<b>4. Algèbre des fonctions (super-)symétriques et nombres d'Hurwitz (spins)</b> .....	45
4.1. Algèbre des fonctions symétriques décalées .....	45
4.2. Groupes de Sergeev et fonctions super-symétriques .....	47
4.3. $q$ -crochets et formes quasi-modulaires .....	49
<b>5. Volumes de Masur-Veech et constantes de Siegel-Veech</b> .....	53
5.1. Volumes et constantes de Siegel-Veech des surfaces de translation .....	53
5.2. Généralisations aux espaces de différentielles supérieures .....	57
5.3. Comportements en grand genre .....	60
<b>6. Comptages d'applications vers des courbes spins</b> .....	63
6.1. Théorie de Gromov-Witten spin .....	63
6.2. Correspondance GW/Hurwitz spin .....	65
6.3. Fonction tau spin équivariante dans le formalisme d'opérateur .....	66

<b>7. Géométrie énumérative des grandes multi-différentielles</b> .....	69
7.1. Forme symplectique de Weil-Petersson .....	69
7.2. Une preuve plate du théorème de Kontsevich-Witten .....	71
7.3. Relations tautologiques de Weil-Petersson .....	73
<b>Bibliographie</b> .....	75
<b>Résumé</b> .....	85

## AVANT-PROPOS

L'objet de ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches est de présenter ma contribution au développement de deux domaines émergents d'application des outils de géométrie énumérative : l'étude des *surfaces plates* et des *courbes spins*. Ces deux classes d'objets et leurs espaces des modules ont été étudiés dès les années 80 et plusieurs travaux suggéraient des ponts avec la géométrie énumérative. Cependant, ce n'est qu'au cours des dernières années que les outils classiques de théorie de l'intersection développés dans le cadre de la théorie de Gromov-Witten ont trouvé leur application concrète dans l'étude de ces deux domaines.

**Contexte historique.** — La géométrie énumérative est la branche des mathématiques consacrée aux problèmes du type suivant : *peut-on compter les objets géométriques satisfaisant des contraintes données ?* Ces questions sont considérées dès l'antiquité et en particulier dans les éléments d'Euclide (4<sup>ème</sup> siècle av. J.C.) dont : “par deux points du plan passent une unique droite” (1<sup>er</sup> axiome), “par un point passe une unique droite parallèle à une droite donnée” (équivalent au 5<sup>ème</sup> axiome des parallèles). La première étude systématique d'une telle classe de problèmes est le *Traité des contacts* par Apolonios de Perga (3<sup>ème</sup> siècle av. J.C.) dédié à la famille de problèmes suivante : “si l'on se donne trois contraintes du type *passer par un point* ou *être tangent à une droite* ou *à un cercle*, combien de cercles du plan satisfont ces contraintes ?” À l'époque moderne, les mathématiciens se tournèrent vers des généralisations algébriques de ces problèmes antiques. Pascal montra par exemple que 5 points du plan en position générale détermine une unique conique (courbe algébrique de degré 2).

La géométrie énumérative est restée pendant longtemps un domaine mineur. En effet, peu de problèmes furent résolus et surtout peu de concepts généraux furent formulés avant la fin du 19<sup>ème</sup> siècle. Les approches de Pascal ou Apolonios de Perga reviennent à construire explicitement l'ensemble des solutions du problème géométrique de départ, ce qui les rend difficilement transposables dans d'autres contextes. Le 15<sup>ème</sup> problème de Hilbert (1900) appelait à combler ce manque d'outils formels d'un point de vue algébrique et à “*mettre en place les bases du calcul énumératif de Schubert*” [Hil02]. Cette injonction fut considérée à partir des années 30 par Van der Waerden [VdW28] puis développée tout au long du 20<sup>ème</sup> siècle par Weil, Chow et Chevalley en s'appuyant sur le formalisme des schémas

[Wei46, Cho56, Che58]. Ces travaux aboutirent au début des années 70 à la *théorie de l'intersection* de Fulton et MacPherson [Ful98].

Bien que le formalisme algébrique fût en place, il a fallu attendre les années 90 pour que le domaine suscite un large enthousiasme dû au développement de la physique théorique. En effet, plusieurs formalismes de théorie des cordes et de gravitation quantique ont conduit à exprimer des fonctions de partition de systèmes physiques comme des solutions de problèmes énumératifs notamment au moyen de la *théorie de Gromov-Witten* (voir chapitre 6). Ce développement a non seulement ouvert des champs d'application à la géométrie énumérative, mais a également permis d'introduire des concepts de la physique des particules dans l'étude de problèmes énumératifs classiques.

L'un des exemples les plus frappants de cet essor théorique est une formule due à Kontsevich permettant d'énumérer les courbes algébriques rationnelles du plan complexe (i.e. les courbes pouvant être paramétrées globalement par un paramètre complexe). Plus précisément, pour tout entier  $d$  strictement positif, on note  $N_d$  le nombre de courbes rationnelles du plan de degré  $d$  et passant par  $3d - 1$  points en positions générales. On a alors la relation

$$(1) \quad N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} d_1^2 d_2 \left( d_2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right)$$

pour tout  $d \geq 2$  (voir [KM97]). Cette formule permet de calculer inductivement les nombres  $N_d$  à partir de la base de récurrence  $N_1 = 1$  (deux points définissent une unique droite) et  $N_2 = 1$  (théorème de Pascal). La preuve de ce résultat est emblématique de l'approche moderne des problèmes énumératifs que l'on peut décomposer de la façon suivante :

1. définir un espace des modules, c'est-à-dire un espace dont les points sont les classes d'isomorphisme des objets géométriques considérés (e.g. l'espace des modules des courbes rationnelles d'un degré donné) ;
2. construire une compactification de cet espace des modules afin d'utiliser des outils cohomologiques (e.g. dualité de Poincaré) ou de théorie de l'intersection dans le cadre algébrique ;
3. exprimer les contraintes géométriques du problème énumératif de départ comme des classes de cohomologie ou de Chow ;
4. produire des relations entre les classes de cohomologie ou de Chow de l'espace des modules pour calculer des solutions numériques au problème énumératif de départ.

Le long de cette démarche la physique théorique sert souvent de guide aux étapes 2 et 4. À titre d'exemple, la preuve de la formule (1) repose de façon cruciale sur la compactification des espaces de courbes rationnelles par les *espace des modules des applications stables*. En effet cette formule découle de l'analyse de la contribution du bord de l'espace des modules au produit d'intersection en cohomologie. Or les espaces des courbes stables ont été introduits pour définir mathématiquement les invariants de Gromov-Witten qui permettent de calculer l'énergie libre d'une variété symplectique en théorie des cordes (voir chapitre 6). La relation (1) est une réalisation d'un principe plus général en théorie des cordes : l'*associativité du produit quantique* ou *relation WDVV* (du nom des physiciens Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde [DVV91]).



Au cours des années 2000, un nouveau développement pour la géométrie énumérative a été ouvert par les travaux de thèse de Mirzakhani sur les surfaces hyperboliques (surfaces Riemanniennes à courbure négative constante). En effet, ceux-ci ont permis d'utiliser la théorie de l'intersection sur les espaces des modules pour étudier des problèmes de géométrie différentielle ou de dynamique sur les surfaces a priori en dehors du contexte de la géométrie algébrique.

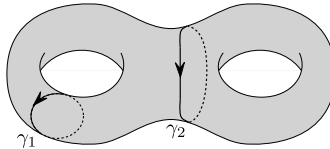


FIGURE 1. Sur cet exemple la courbe simple  $\gamma_2$  est séparante et non  $\gamma_1$ .

Afin d'illustrer ces résultats, considérons une surface hyperbolique  $X$  de genre  $g$  et une longueur  $L > 0$ . Il y a un nombre fini de géodésiques fermées simples sur  $X$  de longueur plus petite que  $L$  et celles-ci peuvent être de deux types : séparante ou non-séparante (voir la figure 1). On note  $P_X(L)$  la probabilité de choisir une géodésique séparante (si l'on tire avec probabilité uniforme). *Problème* : peut-on calculer la limite de  $P_X(L)$  quand  $L$  tend vers l'infini ? La réponse est surprenante car elle ne dépend pas de  $X$  : pour tout  $g$ , il existe une constante rationnelle  $c_g$  telle que pour toute surface hyperbolique de genre  $g$  on a

$$(2) \quad \lim_{L \rightarrow \infty} P_X(L) = c_g.$$

La preuve de ce résultat s'appuie sur la géométrie des espaces des modules de surfaces hyperboliques  $\mathcal{M}_g$  et plus généralement des espaces des modules de surfaces hyperboliques à bords (voir le chapitre 7). Ceux-ci peuvent être considérés du point de vue différentiel, ce qui permet de les munir d'une structure symplectique, la forme de Weil-Petersson, ou du point de vue algébrique ce qui donne accès aux outils de théorie de l'intersection. La preuve de (2) repose sur deux résultats.

1. La constante  $c_g$  peut être exprimée comme le ratio de deux volumes d'espaces des modules de surfaces hyperboliques pour la forme de Weil-Petersson [Mir13]. Ce résultat s'appuie sur la théorie des laminations mesurées de Thurston [Thu22]
2. Les volumes de Weil-Petersson peuvent être exprimés à partir de la théorie de l'intersection des espaces des modules de surfaces de Riemann (ou courbes complexes). Ces espaces sont algébriques et admettent une compactification naturelle construite par Deligne et Mumford dans les années 60 (voir [DM69] et le chapitre 1). Cette expression des volumes de Weil-Petersson comme nombres d'intersection repose sur un théorème de réduction symplectique, le théorème de Duistermaat-Heckman [Mir07b].

**Compter les longues géodésiques sur les surfaces de translation.** — Une part importante des travaux présentés dans ce mémoire visent à établir des résultats analogues aux résultats de Mirzakhani sur les surfaces hyperboliques dans le contexte des surfaces plates.

L'un des résultats principaux porte sur le comptage de géodésiques sur une classe de surfaces plates appelées surfaces de translation. Son énoncé servira ici d'invitation aux concepts et résultats présentés dans l'ensemble du texte.

Une *surface de translation* est un polygone simplement connexe du plan complexe avec un nombre pair d'arêtes  $(e_1, \dots, e_d, e'_1, \dots, e'_d)$  satisfaisant : pour tout  $i$  dans  $[[1, d]]$ , les arêtes  $e_i$  et  $e'_i$  sont représentées par le même vecteur ou nombre complexe, et l'intérieur du polygone est à gauche de  $e_i$  et à droite de  $e'_i$ . À partir de ce polygone on obtient une surface compacte  $S$  en recollant les arêtes d'une même paire. Les sommets du polygone sont envoyés sur des points  $x_1, \dots, x_n$  (voir les exemples 0.0.1 et 0.0.2).

En utilisant la métrique euclidienne du plan on obtient une métrique plate naturelle en dehors des points  $x_i$ . Ces points spéciaux sont des singularités de la métrique qui sont dites *coniques*. Pour tout  $i$  dans  $[[1, d]]$ , l'angle de la singularité  $x_i$  est la somme des angles aux sommets du polygone envoyés sur  $x_i$ . Cet angle est un multiple entier de  $2\pi$  que l'on note  $2\pi m_i$ . La formule de Gauss-Bonnet nous permet d'exprimer la caractéristique d'Euler de la surface  $S$  en fonction de ces angles :

$$(3) \quad 2\pi \chi(S) = \sum_{i=1}^n 2\pi(1 - m_i).$$

Fixons une surface de translation  $S$ . On peut déformer cette surface en variant les nombres complexes aux arêtes. Comme celles-ci sont identifiées par paires, les déformations de  $S$  sont paramétrées par des vecteurs de  $\mathbb{C}^d$ . Le nombre de singularités et leurs angles sont conservés le long de telles déformations. Plus précisément, on définira plus loin l'espace des modules  $\mathcal{H}(m_1, \dots, m_n)$  des surfaces de translation avec des angles  $2\pi m_i$ . Cet espace est de dimension complexe  $d$  et j'ai esquissé ici la construction des cartes locales (voir section 2.2.2).

Une géodésique sur une surface de translation est la donnée d'une trajectoire droite avec des règles d'entrée-sortie du polygone définie par l'association des arêtes en paires (voir les figures 2 et 3 pour des exemples). On s'intéresse à deux types particuliers de géodésiques :

- Les *liens de selles* : celles-ci sont des trajectoires reliant deux des singularités (possiblement la même). Un tel lien de selles définit un nombre complexe que l'on appelle la *période* du lien de selle.
- Les *géodésiques fermées* qui fournissent des trajectoires périodiques de la surface. Une géodésique fermée peut être déplacée par des translations pour fournir une famille de géodésiques de même longueur. L'union de ces translatés forme un cylindre dont les deux bords sont des unions de liens de selles. La *largeur* du cylindre est alors définie comme la longueur de n'importe quelle géodésique de la famille.

Fixons un nombre réel  $L$  positif et deux singularités  $x_i$  et  $x_j$  distinctes de la surface  $S$ . On définit les fonctions de comptage de géodésiques suivantes :

- $\mathcal{N}_{i,j}(S, L)$  est le nombre de périodes associées à des liens de selles allant de  $x_i$  à  $x_j$  de longueurs plus petites que  $L$ . Plusieurs liens de selles peuvent avoir la même période et ne seront donc comptés qu'une fois (voir figure 2).

- $\mathcal{N}_i^{\text{cyl}}(S, L)$  est le nombre de bords de cylindres de largeur plus petite que  $L$  et contenant la singularité  $x_i$  (une singularité peut apparaître aux deux bords d’un même cylindre).

Vues comme des fonctions de  $L$ , ces deux familles de fonctions de comptages sont croissantes. Le problème naturel qui se pose est de savoir comment ces fonctions se comportent pour de grandes valeurs de  $L$ .

**Exemple 0.0.1.** La figure 2 représente une surface de translation à 5 paires d’arêtes ainsi que la surface topologique obtenue par recollement arêtes. Cette surface est de genre 2 avec 2 points spéciaux obtenus comme des images de sommets. Ces deux points sont des singularités d’angles  $4\pi$ . On obtient donc une surface de  $\mathcal{H}(2, 2)$ . La surface de Riemann associée est une surface hyper-elliptique : l’involution hyper-elliptique est la symétrie centrale dans la représentation en tant que polygone et l’on remarque que celle-ci conjugue les deux singularités.

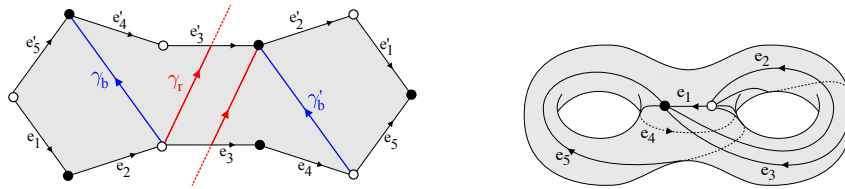


FIGURE 2. Surface de translation dans  $\mathcal{H}(2, 2)$

On a représenté sur cet exemple deux types de liens de selles allant de la singularité blanche à la singularité noire. La géodésique rouge est simple, alors que les géodésiques bleues  $\gamma_b$  et  $\gamma'_b$  ont la même période. Ceci découle de leur configuration topologique : en effet, l’union de ces géodésiques forment un cycle nul en homologie car il sépare la surface en deux composantes connexes. Les géodésiques bleues ne seront donc comptées qu’une seule fois dans la définition de la fonction  $\mathcal{N}_{1,2}(S, L)$ .

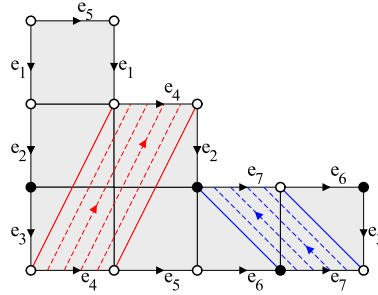
**Exemple 0.0.2.** La figure 3 représente un type particulier de surfaces de translation : une surface à petits carreaux, i.e. une surface admettant un revêtement ramifié (ici de degré 7) au dessus du tore carré  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ . Cette surface est de genre 3 et possède deux singularités d’angles  $8\pi$  (le point blanc) et  $4\pi$  (le point noir). Sur cette figure, le cylindre bleu est bordé par chacune des singularités alors que le cylindre rouge est bordé deux fois par la première singularité.

**Théorème 0.0.3 ([2, 13]).** Pour presque toute surface  $S$  de  $\mathcal{H}(m_1, \dots, m_n)$  (pour la mesure de Lebesgue) on a les comportements asymptotiques suivants:

$$(4) \quad \mathcal{N}_{i,j}(S, L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \left( \frac{m_i m_j}{\text{Aire}(S)} \right) \pi L^2,$$

$$(5) \quad \mathcal{N}_i^{\text{cyl}}(S, L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{m_i}{m_j} \mathcal{N}_j^{\text{cyl}}(S, L).$$

*Éléments de démonstration.* — L’espace des modules  $\mathcal{H}(m_1, \dots, m_n)$  est équipé d’une mesure naturelle : la mesure de Masur-Veech. Celle-ci est définie comme la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^d$  lorsque l’on représente localement les surfaces de translation comme des

FIGURE 3. Surface à petits carreaux dans  $\mathcal{H}(4,2)$ 

polygones comme ci-dessus. On note  $\mathcal{H}_{<1}(m_1, \dots, m_n)$  le sous-espace des surfaces d'aire plus petite que 1. Ce sous-espace a un volume fini pour cette mesure que l'on appelle *volume de Masur-Veech* [Vee82, Mas82].

Par ailleurs, l'espace  $\mathcal{H}(m_1, \dots, m_n)$  est équipé d'une action de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  définie localement par transformation linéaire simultanée des vecteurs aux arêtes d'une surface de translation. Cette action permet de définir une structure de système dynamique en considérant l'action du sous-groupe à un paramètre:

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

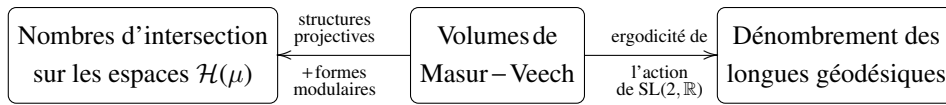
Cette action est ergodique pour la mesure de Masur-Veech. En s'appuyant sur ce résultat Veech puis Eskin-Masur-Zorich ont montré pour chacun des types de fonction de comptages qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$(6) \quad \mathcal{N}(S, L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c}{\mathrm{Aire}(S)} L^2$$

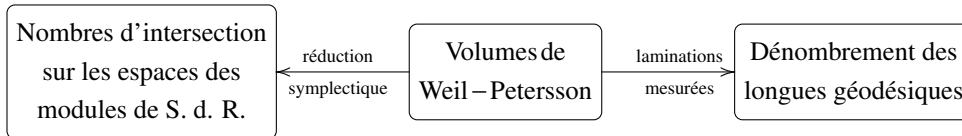
pour presque toute surface de translation  $S$  dans une composante connexe de  $\mathcal{H}(m_1, \dots, m_n)$  (voir [Vee98, EM01, EMZ03]). La constante  $c$  dépend du type de comptage choisi et du choix de la composante connexe de  $\mathcal{H}(m_1, \dots, m_n)$ . On l'appelle *constante de Siegel-Veech*. Cette constante s'écrit comme un ratio entre volumes de Masur-Veech pour différents choix d'angles  $2\pi m_i$ .

Dans [9, 2], nous avons montré avec Chen-Möller-Zagier que le volume de Masur-Veech pouvait s'exprimer comme nombre d'intersection sur un espace des modules compact. La preuve de ce résultat repose sur une combinaison d'arguments géométriques (existence de structures projectives) et de théorie des représentations (combinatoire des formes quasi-modulaires). En utilisant des relations entre classes de cohomologie de ces espaces des modules prouvées dans [10], nous avons obtenu des formules satisfaites par les volumes de Masur-Veech. À partir de ces formules, nous avons déduit des valeurs explicites pour des constantes de Siegel-Veech grâce aux travaux d'Eskin-Masur-Zorich, qui se traduisent par les comportements asymptotiques (4) et (5) du théorème ci-dessus.

Cette approche peut être résumée par le diagramme suivant



que l'on peut comparer à son pendant en géométrie hyperbolique



Bien que la structure générale de ces approches soit similaire, la nature des outils utilisés pour passer d'un domaine à l'autre (géométrie algébrique, géométrie différentielle et dynamique) sont très différentes.

**La correspondance Gromov-Witten/Hurwitz spin.** — Le second type d'objet considéré dans ce mémoire sont les *courbes spins*. Une courbe spin est la donnée d'une paire  $(X, S)$  où  $X$  est une surface de Riemann compacte et  $S$  est une *structure spin*, c'est à dire une racine carrée du fibré co-tangent. Plus précisément, dans le langage de la géométrie complexe  $S$  est un fibré en droite sur  $X$  tel que  $S^{\otimes 2} \simeq T_X^\vee$ . Une structure spin possède un signe + ou – (l'*invariant de Arf*). Ce signe est constant le long d'une déformation de la structure spin.

**Remarque 0.0.4.** Notons qu'au cours de la preuve du théorème 0.0.3 il est indispensable de considérer la notion de courbe spin bien que celle-ci intervienne de manière marginale. Dans le contexte des surfaces de translation, si tous les  $m_i$  sont impairs alors les surfaces de translation de  $\mathcal{H}(m_1, \dots, m_n)$  sont munies d'une structure spin naturelle. Ceci conduit à la décomposition de l'espace des modules en deux sous-espaces en fonction du signe de la structure spin. Il est nécessaire de calculer la contribution de chacune de ces composantes au volume total de l'espace pour calculer les constantes de Siegel-Veech de chacune de ces deux composantes.

Ici on fixe une courbe spin  $(X, S)$  dite *cible*. On peut d'abord s'intéresser au comptage des applications  $f : C \rightarrow X$  où  $C$  est une surface de Riemann. Ce problème a été étudié et précisément décrit, notamment dans une série de trois articles de Okounkov-Pandharipande [OP06b, OP06a, OP06c]. Ici nous allons considérer des raffinements de ces problèmes de comptage permettant de prendre en considération la structure spin  $S$ . On verra qu'il existe deux théories de comptage naturelles pour ces objets avec des propriétés différentes.

- *La théorie de Hurwitz spin.* Cette théorie a l'avantage d'être explicitement déterminée par la théorie des représentations des groupes finis (voir Chapitre 4).
- *La théorie de Gromov-Witten spin.* Cette théorie a été introduite par Kiem et Li dans [KL11a]. L'un des avantages de cette théorie est de permettre de compter les applications dans des surfaces complexes (objets de dimension réelle 4). En effet, si  $Y$  est une surface munie d'une 2-forme holomorphe  $\eta$ , alors on peut considérer le lieu  $D$  le long duquel  $\eta$  s'annule. Si on suppose que ce lieu est une courbe complexe lisse alors le fibré normal  $N$  à  $D$  est une structure spin. Kiem et Li ont montré que

les nombres d'applications vers  $Y$  pouvaient être calculés en fonction des nombres d'applications "spins" vers la courbe spin  $(D, N)$ .

Dans [Lee20], Junho Lee a conjecturé que la théorie de Gromov-Witten spin est en partie déterminée par la théorie de Hurwitz spin. Cette conjecture est appelée *correspondence Gromov-Witten/Hurwitz spin*. Il s'agit de l'analogie d'une correspondance pour les courbes complexes établie dans [OP06b]. Le résultat principal du chapitre 6 est le suivant.

**Theorem 0.0.5 ([5]).** *La correspondance Gromov-Witten/Hurwitz spin est valide si la cible est la courbe spin  $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1))$ .*

La preuve repose sur l'existence d'une action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{P}^1$  qui permet d'appliquer des théorèmes de localisation du type de la localisation d'Atiyah-Bott [AB67], ainsi que sur le formalisme d'opérateurs présenté au chapitre 4 et 6. Ce résultat permet notamment de décrire complètement le comptage d'applications vers des surfaces obtenues comme des éclatements d'une surface en un point lisse (lorsque la cible de l'application est le diviseur exceptionnel).

**Organisation du texte.** — Les chapitres 1 et 2 constituent des introductions aux espaces des modules de courbes, courbes spins et surfaces plates, ainsi qu'à leurs anneaux tautologiques.

Le chapitre 3 est consacré aux cycles des espaces des modules de courbes construits à partir des espaces de surfaces plates. J'y présente plusieurs problèmes ouverts notamment liés aux raffinements des résultats connus en fonction du l'invariant de Arf des structures spins [3, 4, 6, 7, 10].

Le chapitre 4 collecte les résultats de théorie des représentations des groupes symétriques et de Sergeev utilisés dans la suite du manuscrit. Ce chapitre est essentiellement classique hormis l'expression des nombres d'Hurwitz signés avec poids de Siegel-Veech obtenue avec J.W. van Ittersum dans [13].

Les résultats sur les volumes et constantes de Siegel-Veech des espaces de surfaces plates évoqués dans l'avant-propos seront présentés au chapitre 5 [1, 2, 9, 11, 12, 13].

Jusqu'à ce point du texte les structures spins sont étudiées essentiellement à partir de la théorie des surfaces plates. Le chapitre 6 sort de ce contexte et présente les résultats en commun avec Giacchetto-Kramer-Lewanski sur la théorie de Gromov-Witten des courbes spins [5].

Enfin, le chapitre 7 présente des travaux en cours [8] : cette étude montre que la théorie de l'intersection des espaces de  $k$ -différentielles holomorphes pour de grandes valeurs de  $k$  peut être utilisée afin de produire des résultats généraux de géométrie énumérative. Cette approche permet de produire une nouvelle preuve du théorème de Kontsevich-Witten ainsi que de nouvelles relations tautologiques.

## LISTE DES TRAVAUX PRÉSENTÉS

- [1] Dawei CHEN, Martin MÖLLER et Adrien SAUVAGET : Masur-Veech volumes and intersection theory: the principal strata of quadratic differentials. *Duke Math. J.*, 172(9):1735–1779, 2023.
- [2] Dawei CHEN, Martin MÖLLER, Adrien SAUVAGET et Don ZAGIER : Masur-Veech volumes and intersection theory on moduli spaces of Abelian differentials. *Invent. Math.*, 222(1):283–373, 2020.
- [3] Qile CHEN, Felix JANDA, Yongibn RUAN et Adrien SAUVAGET : Towards logarithmic GLSM: the  $r$ -spin case. *Geom. Topol.*, 26(7):2855–2939, 2022.
- [4] Matteo COSTANTINI, Adrien SAUVAGET et Johannes SCHMITT : Integrals of  $\psi$ -classes on twisted double ramification cycles and spaces of differentials. *arXiv:2112.04238*, 2021.
- [5] Alessandro GIACCHETTO, Reinier KRAMER, Danilo LEWAŃSKI et Adrien SAUVAGET : The spin Gromov-Witten/Hurwitz correspondence for  $\mathbb{P}^1$ . *arXiv:2208.03259*, 2022.
- [6] Dmitry KOROTKIN, Adrien SAUVAGET et Peter ZOGRAF : Tau functions, Prym-Tyurin classes and loci of degenerate differentials. *Math. Ann.*, 375(1-2):213–246, 2019.
- [7] Georgios POLITOPOULOS et Adrien SAUVAGET : Computation of  $\lambda$ -classes via strata of differentials. *arXiv:2206.00358*, 2022.
- [8] Adrien SAUVAGET : Moduli spaces of hyperbolic surfaces from a flat perspective. *en préparation*.
- [9] Adrien SAUVAGET : Volumes and Siegel-Veech constants of  $\mathcal{H}(2g-2)$  and Hodge integrals. *Geom. Funct. Anal.*, 28(6):1756–1779, 2018.
- [10] Adrien SAUVAGET : Cohomology classes of strata of differentials. *Geom. Topol.*, 23(3):1085–1171, 2019.

- [11] Adrien SAUVAGET : Volumes of moduli spaces of flat surfaces. *arXiv:2004.03198*, 2020.
- [12] Adrien SAUVAGET : The large genus asymptotic expansion of Masur-Veech volumes. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20):15894–15910, 2021.
- [13] Adrien SAUVAGET et Jan-Willem VAN ITTERSUM : Cylinder counts and spin refinement of area Siegel-Veech constants. *arXiv:2210.17374*, 2022.



# CHAPITRE 1

## ESPACES DES MODULES DE COURBES ET COURBES SPINS

Dans tout le texte les schémas et champs et algébriques sont définis au-dessus de  $\mathbb{C}$ . La notation  $|\cdot|$  est utilisée pour le cardinal si  $\cdot$  est un ensemble ou pour la somme des entrées si il s'agit d'un vecteur.

### 1.1. Espace des modules de courbes et anneaux tautologiques

**1.1.1. Définitions, notations.** — Soit  $n \geq 0$ . Une famille de courbes à  $n$  points marqués semi-stables est la donnée de

$$(\pi : C \rightarrow B, \sigma_1, \dots, \sigma_n), \text{ où}$$

- $C$  et  $B$  sont des  $\mathbb{C}$ -schémas,  $\pi$  est un morphisme plat ;
- les fibres au-dessus des points géométriques sont des courbes à singularités nodales ;
- les  $(\sigma_i)_{i \in \{1..n\}}$  sont des sections de  $\pi$  à valeur dans le lieu lisse des courbes et ne s'intersectant pas.

Un morphisme entre deux familles de courbes est la donnée de morphismes  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & C \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array} \quad \begin{array}{c} \sigma'_i \curvearrowright \\ \sigma_i \curvearrowleft \end{array}$$

et où le carré central est cartésien, i.e. il existe un isomorphisme (non canoniquement défini)  $C' \simeq C \times_B B'$ . On note  $\omega_{\log} = \omega_{C/B}(\sigma_1 + \dots + \sigma_n)$ , où  $\omega_{C/B}$  est le faisceau dualisant relatif. Une famille de courbe est *stable* si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. Chaque fibre géométrique a un nombre fini d'automorphismes ;
2.  $\omega_{\log}$  est ample sur chaque fibre géométrique de  $\pi$  ;
3. chaque composante rationnelle d'une fibre géométrique a au moins trois points spéciaux (les points spéciaux sont les points marqués et branches de nœuds).

On définit respectivement  $\mathcal{M}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \subset \mathfrak{M}_{g,n}$  comme les espaces des modules de courbes connexes lisses, stables et semi-stables de genre  $g$  à  $n$  points marqués, i.e. les catégories dont les objets sont les familles de courbes (lisses, stables et semi-stables respectivement) dont les fibres géométriques sont connexes et de genre arithmétique  $g$ , et dont les morphismes sont les isomorphismes de familles de courbes. Ces trois espaces sont des champs algébriques lisses de dimension  $3g - 3 + n$  et  $\mathcal{M}_{g,n}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  sont des champs de Deligne-Mumford ou orbivariétés si on les considère du point de vue analytique (voir [DM69, ACG11]).

Il existe une *courbe universelle*  $\pi : \mathfrak{C}_{g,n} \rightarrow \mathfrak{M}_{g,n}$  et des sections de ce morphisme  $(\sigma_i)_{i=1,\dots,n}$  satisfaisant la propriété universelle suivante : pour toute famille de courbe  $(\pi : C \rightarrow B, \sigma_i)$  il existe un morphisme  $\varphi : B \rightarrow \mathfrak{M}_{g,n}$  et un isomorphisme  $C \simeq B \times_{\mathfrak{M}_{g,n}} \mathfrak{C}_{g,n}$ . On note  $\mathcal{C}_{g,n}$  et  $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$  les restrictions de la courbe universelle aux espaces des modules de courbes lisses et stables. Il est utile de remarquer qu'il existe un isomorphisme canonique entre les familles de courbes  $\overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  où l'on a utilisé le morphisme d'oubli du point marqué (que l'on le notera  $\pi$  également).

**1.1.2. Graphes stables et stratification de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .** — L'espace  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est propre et contient  $\mathcal{M}_{g,n}$  comme ouvert dense. Le complémentaire  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \setminus \mathcal{M}_{g,n}$  est un diviseur à croisements normaux qui induit une décomposition de l'espace  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  en strates (les composantes irréductibles des diviseurs et de leurs intersections). Cette stratification est indexée par une famille d'objets combinatoires appelés *graphes stables*. Un graphe stable de genre  $g$  à  $n$  pattes est la donnée de :

$$\Gamma = (V, H, h : H \rightarrow V, g : V \rightarrow \mathbb{N}, i : H \rightarrow H, \phi : H^i \simeq \llbracket 1, n \rrbracket), \text{ où}$$

- les ensembles  $V$  (*sommets*) et  $H$  (*demi-arêtes*) sont finis ;
- $i$  est une involution dont les cycles de longueur 2 forment un ensemble  $E$  (les *arêtes*) et les points fixes sont les pattes ;
- la bijection  $\phi$  identifie l'ensemble des pattes avec l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ;
- pour chaque sommet  $v$  on note  $n(v)$  le cardinal de  $h^{-1}(v)$  (la *valence* du sommet) et on impose la condition de stabilité :  $2g(v) - 2 + n(v) > 0$  ;
- le *nombre de boucles* du graphe est défini comme  $h^1(\Gamma) = |E| - |V| + 1$ , et on impose que le genre du graphe soit égal à  $g$ , i.e. :

$$(8) \quad h^1(\Gamma) + \sum_{v \in V} g(v) = g.$$

On notera  $\text{Stab}_{g,n}$  l'ensemble des graphes stables de genre  $g$  à  $n$  pattes. Un tel graphe  $\Gamma$  définit un espace au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  de la forme :

$$(9) \quad \zeta_{\Gamma} : \mathcal{M}_{\Gamma} := \left( \prod_{v \in V} \mathcal{M}_{g(v), n(v)} \right) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}.$$

Ce morphisme est construit en attachant les points marqués de courbes dans  $\mathcal{M}_{\Gamma}$  le long de nœuds. Il est fini et de degré  $|\text{Aut}(\Gamma)|$  (un automorphisme de  $\Gamma$  est la donnée d'automorphismes de  $V$  et  $H$  commutant avec les applications  $g, h, i$  et  $\phi$ ). L'image de  $\mathcal{M}_{\Gamma}$

est de co-dimension égale à  $|E(\Gamma)|$  dans  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  et on a

$$(10) \quad \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = \bigsqcup_{\Gamma \in \text{Stab}_{g,n}} \zeta_{\Gamma}(\mathcal{M}_{\Gamma}).$$

On notera  $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma} = \prod_{v \in V} \overline{\mathcal{M}}_{g(v),n(v)}$  la compactification de  $\mathcal{M}_{\Gamma}$  par courbes stables.

**1.1.3. Anneaux tautologiques.** — Dans tout le texte, les groupes de cohomologie et de Chow que nous considérerons seront à coefficients rationnels.

Les *anneaux tautologiques*  $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  et  $RH^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  sont définis comme les plus petits systèmes de sous-algèbres des anneaux  $A^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  et  $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  stables par poussés en avant pour les morphismes associés aux graphes stables.

Cette définition des anneaux tautologiques à l'avantage d'être minimale mais peu manipulable en pratique. En revanche on dispose de familles explicites de classes engendrant linéairement ces algèbres. Celles-ci sont construites à partir des deux familles de classes suivantes :

- les *classes*  $\psi$  : pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\psi_i = c_1(\sigma_i^* \omega_{\overline{\mathcal{C}}_{g,n}/\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}) \in A^1(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  ou  $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ .
- les *classes*  $\kappa$  : pour tout  $m \geq 0$ , on note  $\kappa_m = \pi_* \psi_{n+1}^{m+1} \in A^m(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  ou  $H^{2m}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  (ici  $\pi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est le morphisme d'oubli du dernier points marqué équivalent au morphisme définissant la courbe universelle).

On note  $S^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  l'espace vectoriel de combinaisons linéaires formelles de paires  $(\Gamma, M)$  où  $\Gamma$  est un graphe stable de genre  $g$  à  $n$  pattes et  $M$  est un monôme en symboles  $\psi_h$  pour  $h \in H(\Gamma)$  et  $\kappa_m(v)$  pour  $v \in V(\Gamma)$ . La graduation de cette espace vectoriel est définie en assignant à un générateur le degré :  $|E(\Gamma)| + \deg(M)$  (où le degré du monôme est défini par  $\deg(\psi_h) = 1$  et  $\deg(\kappa_m(v)) = m$ ). Le morphisme naturel  $\Xi : S^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \rightarrow R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  défini par  $(\Gamma, M) \mapsto \zeta_{\Gamma*} M$  est ainsi un morphisme gradué.

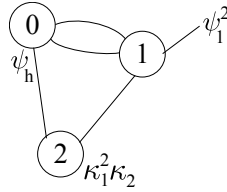


FIGURE 4. Exemple de générateur de l'algèbre  $S^*(\overline{\mathcal{M}}_{5,1})$  de degré 11.

**Proposition 1.1.1 ([GP03]).** *L'espace  $S^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  est une algèbre graduée (on l'appelle l'algèbre des strates) et l'application  $S^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \rightarrow R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  est surjective.*

Le noyau de  $\Xi$  est appelé l'ensemble des *relations tautologiques*. Au cours des dernières décennies, plusieurs méthodes ont été développées pour produire des relations tautologiques (voir [Fab99, Yin16, CJ18] pour quelques unes de ces techniques). L'une des plus grandes classes de relations connues sont les relations de Pixton-Faber-Zagier prouvées dans [PPZ15, Jan17]. Un problème ouvert est de savoir si ces relations engendrent le noyau de  $\Xi$ .

Plus généralement, on sera amené à étudier la cohomologie de projectivisés de fibrés vectoriels  $E$  sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . On rappelle que si le rang de  $E$  est égal à  $r$ , alors on a

$$(11) \quad H^*(\mathbb{P}E, \mathbb{Q}) \simeq H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})[\xi] / (\xi^r + c_1 \xi^{r-1} + \dots + c_r),$$

où les  $c_i$  sont les classes de Chern de  $E$ ,  $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$  et le plongement de l'algèbre  $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  se fait par le morphisme tirer-en-arrière. Si les classes de Chern de  $E$  sont tautologiques, alors on définit l'anneau tautologique de  $E$  comme le sous-espace de  $H^*(\mathbb{P}E, \mathbb{Q})$  engendré par  $\xi$  et  $RH^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  et on le note  $RH^*(E)$ . L'équivalent en Chow  $R^*(E)$  est défini de manière analogue.

## 1.2. Courbes spins et parité

**1.2.1. Un tour des définitions des structures spins.** — Soit  $C$  une courbe lisse connexe de genre  $g$ . Une *structure spin sur  $C$*  est la donnée d'un fibré en droites  $L \rightarrow C$  satisfaisant l'identité  $L^{\otimes 2} \simeq \omega_C$  dans  $\text{Pic}(C)$ . On appelle la paire  $(C, L)$  une *courbe spin*. Une structure spin détermine un invariant dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  défini comme

$$(12) \quad p(L) := h^0(C, L) \pmod{2}.$$

Selon les sources, cet invariant est appelé *parité*, *invariant de Arf* ou *signe* de  $L$  (dans ce cas, l'invariant considéré est  $(-1)^{p(L)}$ ). Nous utiliserons librement l'une de ces trois appellations selon le contexte. On note  $\Phi(C)$  l'ensemble des structures spins sur  $C$ .

On note  $J_2(C)$  le sous-groupe de  $\text{Pic}(C)$  des points de 2-torsion. Celui-ci est isomorphe à  $H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . L'ensemble  $\Phi(C)$  est un  $J_2(C)$ -torseur. En effet, la différence entre deux structures spins produit une racine carrée du fibré trivial. En particulier l'ensemble des structures spins est fini et de cardinal  $2^{2g}$ .

Cette première définition des structures spins et de leur parité dépend de la structure algébrique/analytique de  $C$ , cependant il existe des descriptions topologiques équivalentes.

*Définition topologique.* — Considérons  $p : U \rightarrow C$ , le fibré en cercles obtenu par projectivisation réelle du fibré tangent à  $C$ . On note  $i : S^1 \rightarrow U$  le morphisme d'inclusion d'une fibre. On a les suites exactes suivantes :

$$(13) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} H_1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H_1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

$$(14) \quad 0 \xrightarrow{p^*} H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Une structure spin  $L \rightarrow C$  détermine un fibré en droites  $p^*L \rightarrow U$  et donc un élément  $[L]$  dans  $H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  satisfaisant  $i^*[L] = 1$ . En fait, cette application définit un isomorphisme :

$$(15) \quad \Phi(C) \simeq \tilde{H}^1(C) \stackrel{\text{def}}{=} (i^*)^{-1}(1) \subset H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

(voir [Ati71]). En utilisant cet isomorphisme,  $\Phi(C)$  est identifié à un sous-espace affine de  $H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  et l'action de  $H^1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est donnée par l'action canonique du sous-espace vectoriel associé.

*Forme quadratique d'une structure spin.* — À partir du point de vue topologique, on peut associer une *forme quadratique* canonique à une structure spin, i.e. une fonction

$\omega : H_1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  satisfaisant :

$$(16) \quad \omega(\gamma + \gamma') = \omega(\gamma) + \omega(\gamma') + \gamma \cdot \gamma'$$

(le produit utilisé ici est le produit d'intersection). Pour ce faire, remarquons d'abord que tout cycle lisse orienté  $\gamma$  de  $C$  détermine un relevé  $\tilde{\gamma}$  dans  $U$  obtenue en prenant la direction tangente en tout point. La classe de ce relevé dans  $H_1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  ne dépend que de la classe de  $\gamma$  (en particulier elle ne dépend pas de son orientation). De plus, si l'on note  $\epsilon$  le générateur de l'image de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dans  $H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , alors on a l'identité

$$(17) \quad \widetilde{\gamma + \gamma'} = \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma'} + (\gamma \cdot \gamma')\epsilon$$

(voir [Joh80]). Si  $\xi \in H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , on utilise cette identité pour définir la forme quadratique suivante :

$$(18) \quad \omega_\xi(\gamma) = \langle \xi, \gamma \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit d'accouplement sur  $U$ . Pour vérifier que c'est une forme quadratique il suffit d'observer que :

$$(19) \quad \omega_\xi(\gamma + \gamma') = \langle \xi, \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma'} + (\gamma \cdot \gamma')\epsilon \rangle = \langle \xi, \tilde{\gamma} \rangle + \langle \xi, \tilde{\gamma'} \rangle + (\gamma \cdot \gamma').$$

(la seconde égalité est due à la contrainte  $\langle \xi, \epsilon \rangle = 1$  définissant  $\tilde{H}^1(C)$ ). Cette construction fournit une identification de l'ensemble des structures spins sur  $C$  avec  $\mathcal{Q}(C)$ , l'ensemble des formes quadratiques sur  $H^1(U, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Cette identification peut également être construite directement à partir d'une structure spin  $L \rightarrow C$  en définissant :

$$\omega_L(\gamma) = p(L \otimes \gamma^\vee) + p(L),$$

où  $\gamma^\vee$  est le dual de  $\gamma$  par dualité de Poincaré.

*Nombre de structures spins paires/impaires.* — Les points de vue alternatifs sur les structures spins permettent de donner des formules simples de la parité. En effet soient  $(\alpha_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq g}$  une famille de courbes fermées simples formant une base symplectique de  $H_1(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Les identifications ci-dessus permettent d'identifier la parité d'une structure spin avec l'invariant construit par Arf pour la forme quadratique associée (d'où l'appellation alternative). Celui-ci peut-être calculé par la formule suivante

$$(20) \quad p(L) = \sum_{i=1}^g \omega_L(\alpha_i) \omega_L(\beta_i)$$

(voir [Joh80, Arf41]). De plus cette identification permet d'utiliser le résultat général sur les formes quadratiques associées à une forme symplectique :

**Proposition 1.2.1.** *Il y a  $2^{g-1}(2^g + 1)$  structures spins paires et  $2^{g-1}(2^g - 1)$  structures spins impaires sur  $C$ .*

La valeur  $\omega_L(\alpha_i)$  peut être calculée de manière géométrique. En effet, si l'on considère une section méromorphe  $s$  de  $L$  alors  $s^2$  est une forme différentielle méromorphe. On verra au chapitre suivant que cette forme permet de définir une structure de translation sur  $C$  (similaire à celle introduite à l'avant-propos). Si l'on considère une courbe fermée simple

$\gamma$  évitant les singularités de  $s$ , alors  $\omega_L([\gamma])$  est le nombre (modulo 2) de rotations complète d'un vecteur tangent le long de ce chemin.

*Calcul algébro-géométrique de la parité.* — Le point de vue topologique sur les structures spins permet de calculer efficacement leur parité. Cependant, Mumford a donné une interprétation de la parité qui est plus adaptée à un contexte algébro-géométrique (voir [Mum71]).

Soit  $(C, L)$  une courbe spin et  $p_1, \dots, p_n$  des points de  $C$  distincts. On note  $\Sigma$  le diviseur  $(p_1) + \dots + (p_n)$ . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$(21) \quad \begin{array}{ccc} H^0(C, L) & \longrightarrow & W_2 = H^0(C, L/L(-\Sigma)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_1 = H^0(C, L(\Sigma)) & \longrightarrow & V = H^0(C, L(\Sigma)/L(-\Sigma)). \end{array}$$

Pour  $n$  suffisamment grand, toutes les flèches de ce diagramme sont injectives et donc  $H^0(C, L)$  est l'intersection de  $W_1$  et  $W_2$  dans  $V$ . De plus, l'espace  $V$  est de dimension  $2n$  alors que  $W_1$  et  $W_2$  sont de dimension  $n$ . Par ailleurs, on a une forme quadratique définie comme suit : si  $\bar{s}$  est une section de  $L(\Sigma)/L(-\Sigma)$  et  $s_i$  est le germe de  $L(\Sigma)_{s_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ , alors on définit :

$$(22) \quad q(\bar{s}) = \sum_{i=1}^n \text{res}(s_i^2),$$

où  $s_i^2$  défini une section de  $\omega_C(2\Sigma)$ , donc une différentielle méromorphe dont on peut définir les résidus aux pôles. Les espaces  $W_1$  et  $W_2$  sont des sous-espaces isotropes de  $q$  de dimension maximale ; en effet, si  $\bar{s}$  provient d'une section globale (i.e. de  $W_1$ ) alors le théorème des résidus implique que  $q(\bar{s}) = 0$ , et si  $\bar{s}$  provient de  $W_2$  alors tous ses résidus sont nuls par définition. D'après un résultat classique pour les formes quadratiques on a la propriété suivante : si  $u : V \rightarrow V$  est un isomorphisme de  $V$  préservant  $q$  et envoyant  $W_1$  sur  $W_2$  alors

$$(23) \quad p(L) \equiv n + \det(u) \pmod{2}$$

(voir [Bou59, section 6, exercice 18]). Cette expression de la parité a permis à Mumford de montrer que celle-ci est localement constante le long de déformations algébriques d'une courbe spin. En effet, la donnée de  $(V, W_1, W_2, q)$  dépend continument d'une courbe spin et donc la parité de la dimension de  $W_1 \cap W_2$  également <sup>(1)</sup>.

### 1.3. Espace des modules de courbes spins et classes signées

**1.3.1. Définition, propriétés.** — Soient  $g, n \in \mathbb{N}$ , des entiers satisfaisant  $2g - 2 + n > 0$ . On définit l'espace des courbes spins lisses  $\mathcal{S}_{g,n}$  comme la catégorie des couples

$$\left( (\pi : C \rightarrow B, (\sigma_i : B \rightarrow C)_{1 \leq i \leq n}), L \rightarrow C \right),$$

constitués d'une famille de courbes lisses marquées de genre  $g$  et d'un fibré en droites satisfaisant  $L^{\otimes 2} \simeq \omega_{C/B}$ . Cette catégorie est un champ de Deligne-Mumford de dimension

<sup>(1)</sup>L'invariance de la parité par déformation de la structure complexe découle également de la description topologique des structures spins.

$3g - 3 + n$ . De plus il existe un morphisme naturel

$$(24) \quad \epsilon : \mathcal{S}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$$

défini par l'oubli de la structure spin. Ce morphisme est un torseur pour le fibré en groupe  $J_2 \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  défini comme le sous-groupe du groupe de Picard universel  $\text{Pic}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  des éléments d'ordre 2. Le morphisme  $\epsilon$  est étale et de degré  $2^{2g-1}$ . En effet, un point générique de  $\mathcal{M}_{g,n}$  a  $2^{2g}$  pré-images mais chaque objet de  $\mathcal{S}_{g,n}$  porte un automorphisme de multiplication par  $-1$  ce qui conduit à une structure de champ non-triviale pour tout ouvert de  $\mathcal{S}_{g,n}$ . Par ailleurs, il existe une courbe universelle  $\mathcal{C}_{g,n}^{1/2} \rightarrow \mathcal{S}_{g,n}$  équipé une structure spin universelle  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}_{g,n}^{1/2}$ .

*Décomposition de  $\mathcal{S}_{g,n}$ .* — Comme expliqué ci-dessus la parité d'une structure spin est localement constante le long des déformations d'une courbe spin lisse. On a alors une décomposition des espaces des modules :

$$(25) \quad \mathcal{S}_{g,n} = \mathcal{S}_{g,n}^+ \sqcup \mathcal{S}_{g,n}^-.$$

De plus, d'après la proposition 1.2.1, chacune de ces composantes est étale au-dessus de  $\mathcal{M}_{g,n}$  et de degré respectif :  $2^{g-2}(2^g \pm 1)$ . On remarque encore la présence d'un facteur  $\frac{1}{2}$  dû à la structure de champ de  $\mathcal{S}_{g,n}$  lorsque l'on compare au comptage de structures spins donné par la proposition 1.2.1.

*Structures spins généralisées.* — Soit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  est un vecteur de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  satisfaisant

$$(26) \quad |a| \equiv n \pmod{2}.$$

On définit alors  $\mathcal{S}_{g,a}$  comme l'espace des modules de tuples  $(C, x_1, \dots, x_n, L \rightarrow C)$  où

$$(27) \quad L^{\otimes 2} \simeq \omega_{\log}(-a_1x_1 - \dots - a_nx_n).$$

Si  $a = (1^n)$ , alors on a  $\mathcal{S}_{g,a} = \mathcal{S}_{g,n}$ . Si on note  $\epsilon : \mathcal{S}_{g,a} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  le morphisme d'oubli, alors ces espaces sont de nouveau canoniquement des  $J_2$ -torseurs sur  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Cependant pour  $a \neq (1^n)$ , l'espace  $\mathcal{S}_{g,a}$  est connexe, i.e. il n'existe pas d'invariant local non trivial pour les espaces de structures spins généralisées différents de  $\mathcal{S}_{g,n}$ .

**1.3.2. Compactifications des espaces de structures spins.** — Plusieurs compactifications des espaces de courbes spins ont été construites et il existe des morphismes de comparaison entre celles-ci (voir [CCC07, Jar98, AJ03, CZ09]). Nous nous contentons ici de rappeler la construction de la compactification la plus classique décrite par Cornalba dans [Cor89].

Une *courbe décente* est une courbe semi-stable satisfaisant la condition : les composantes de genre 0 instables intersectent des composantes stables (une ou deux) le long de deux nœuds exactement. Une structure spin sur une courbe décente est la donnée d'un fibré en droites  $L \rightarrow C$  et d'un morphisme  $\alpha : L^{\otimes 2} \rightarrow \omega$  tels que :

- La restriction de  $L$  à une composante instable est de degré 1 ;
- Le morphisme  $\alpha$  ne s'annule pas en dehors des composantes instables.

Ces conditions impliquent que  $\alpha$  est identiquement nulle sur chaque composante instable. On appelle *courbe spin (généralisée)* la donnée d'une courbe décente et d'une structure spin. On note  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$  l'espace des modules de courbes spins.

*Propriétés de  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$ .* — Le morphisme d'oubli de la structure spin (24) s'étend à cette compactification  $\epsilon : \overline{\mathcal{S}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Ce morphisme n'est plus étale. En effet l'espace  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$  est normal mais pas lisse en général. En revanche cet espace possède toujours deux composantes connexes :  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}^+$  et  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}^-$ . On note

$$[\pm] = [\overline{\mathcal{S}}_{g,n}^+] - [\overline{\mathcal{S}}_{g,n}^-] \in H^0(\overline{\mathcal{S}}_{g,n}, \mathbb{Q}).$$

L'anneau tautologique de  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$  est le sous anneau  $RH^*(\overline{\mathcal{S}}_{g,n}) \subset H^*(\overline{\mathcal{S}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  engendré par  $[\pm]$  et les tirés-en-arrières de classes tautologiques de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

Soit  $a$  est une classe de  $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  qui admet un relèvement  $\tilde{a}$  dans  $H^*(\overline{\mathcal{S}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ , i.e. une classe satisfaisant  $\epsilon_* \tilde{a} = a$ . On associe alors à  $a$  la *classe signée* :

$$(28) \quad a^\pm = \epsilon_*([\pm] \cdot \tilde{a}).$$

Notons que cette classe dépend du choix de relèvement de  $a$ . Cependant la notation sera souvent sans ambiguïté car le relèvement sera canoniquement associé à un problème modulaire. Plusieurs familles de classes signées seront considérées tout au long de ce manuscrit : e.g. classes de strates de différentielles, classes de Witten et de double ramification, schémas de Hurwitz, ...

**1.3.3. Stratification de  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$ .** — De même que  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , l'espace  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$  est stratifié en fonction du profil topologique des courbes spins. Les strates de  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$  sont indexées par les paires :

$$(\Gamma, w : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

où  $\Gamma$  est un graphe stable et  $w$  est une fonction satisfaisant : pour tout vertex  $v$ , le nombre de demi-arêtes incidentes à  $v$  et faisant partie d'une arête envoyée sur 0 est paire. L'espace  $\mathcal{S}_{\Gamma,w}$  est le sous-espace de  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$  des courbes spins  $(C, \alpha : L^{\otimes 2} \rightarrow \omega_C)$  telles que : (i) le graphe dual de la stabilisation de  $C$  est donné par  $\Gamma$  ; (ii) chaque arête envoyée sur 1 par  $w$  correspond à un noeud remplaçant une composante rationnelle instable de la courbe décente (contractée par le morphisme de stabilisation).

Contrairement à la stratification de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , on ne peut pas identifier directement les strates de  $\overline{\mathcal{S}}_{g,n}$  avec des produits d'espaces de structures spins. En effet, à partir de la donnée d'une structure spin sur chaque composante, on doit reconstruire une structure spin sur la courbe décente. En effet, étant données deux structures spins  $L$  et  $L'$  isomorphes sur chaque composante, le fibré en droite  $P = L \otimes L'^{\vee}$  est trivial sur chaque composante et satisfait  $P^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_C$ . Le groupe de tels fibrés en droite est isomorphes à  $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  qui est de cardinal  $2^{h^1(\Gamma)}$ . Formellement, la strate  $\mathcal{S}_{\Gamma,w}$  est un  $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -torseur sur l'espace :

$$\prod_{v \in V} \mathcal{S}_{g(v), a(v)}$$

où  $a(v) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n(v)}$  est défini en imposant :  $a(h) = 1$  si  $h$  est une patte et  $a(h) = w(e)$  si  $h$  est une demi-arête de  $e$ .



*Parité des strates.* — On a vu aux sections précédentes que le degré de l'application d'oubli de la structure spin est  $2^{2g-1}$  et que le calcul des nombres de structures spins paires et impaires se traduit par :  $\epsilon_* [\pm] = 2^{g-1}$ .

On considère ici la restriction de l'application d'oubli de la structure spin à une strate, i.e. l'application

$$\epsilon : \mathcal{S}_{\Gamma,w} \rightarrow \mathcal{M}_{\Gamma}.$$

Le degré de cette application est  $2^{\sum_v (2g(v)-1)}$  (on a un automorphisme d'ordre 2 par sommet du graphe). On a alors le résultat suivant :

$$(29) \quad \epsilon_* ([\overline{\mathcal{S}}_{\Gamma,w}] [\pm]) = \begin{cases} 2^{\sum_v (g(v)-1)} & \text{si } w(e) = 1 \text{ pour tout } e \in E(\Gamma), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce résultat traduit le fait suivant :

1. Si  $w = 1$ , alors chaque sommet définit un espace se décomposant en fonction de la parité de la structure spin. De plus la parité de la structure globale est donnée comme la somme des parités des structures spins sur chaque composante.
2. Au contraire, si l'une des arêtes a valeur 0 alors celle-ci est nécessairement non-séparante. De plus, les deux choix de recollement d'une structure spin le long du nœud correspondant à cette arête donnent lieu à des parités opposées.

Ces observations seront utilisées aux chapitres 3 et 6 pour simplifier les calculs de classes signées.



## CHAPITRE 2

### SURFACES PLATES ET MULTI-DIFFÉRENTIELLES

#### 2.1. Espaces des modules de multi-différentielles

On fixe dans cette section  $k \in \mathbb{N}$ .

**2.1.1. Définitions, notations.** — Une  $k$ -forme méromorphe  $\eta$  sur une courbe stable  $(C, x_1, \dots, x_n)$  est la donnée d'une  $k$ -forme méromorphe sur la normalisation de  $C$  et satisfaisant :

1. les pôles de  $\eta$  sont aux points marqués ou aux nœuds ;
2. les pôles aux nœuds sont d'ordre au plus  $k$  ;
3. Si  $x_e, x'_e$  sont les deux pré-images d'un nœud alors on impose la condition de résidus

$$\text{res}_{x_e}(\eta) = (-1)^k \text{res}_{x'_e}(\eta),$$

où le résidu est défini ici par  $\eta = (\text{res}_x(\eta) + zf(z)) \left(\frac{dz}{z}\right)^k$  pour toute coordonnée  $z$  envoyant  $x$  sur 0 et où  $f$  est holomorphe.

L'espace des modules de  $k$ -différentielles est le fibré vectoriel au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  :

$$\overline{\Omega}_{g,n}^k = \pi_* \left( \omega_{\overline{C}_{g,n}/\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \omega_{\log}^{\otimes(k-1)} \right)$$

où  $\pi$  est le morphisme définissant la courbe universelle (on utilisera la même notation pour un fibré vectoriel et l'espace total associé). Ses points sont en correspondance avec les classes d'isomorphisme de courbes stables munies d'une  $k$ -forme méromorphe avec des pôles d'ordres au plus  $k-1$  aux points marqués. Enfin, si  $P = (p_1, \dots, p_n)$  est un vecteur de  $\mathbb{N}^n$  on notera

$$\overline{\Omega}_{g,n}^k(P) = \pi_* \left( \omega_{\log}^{\otimes k} (p_1 \sigma_1 + \dots + p_n \sigma_n) \right),$$

l'espace des  $k$ -différentielles avec des pôles d'ordres supérieurs. Par la formule de Riemann-Roch le rang de ce fibré est égal à  $(2k-1)(g-1) + kn + |P|$ .

Soit  $\mu = (m_1, \dots, m_n)$  un vecteur de  $\mathbb{Z}^n$  satisfaisant  $|\mu| = k(2g-2+n)$ . La strate<sup>(1)</sup> de  $k$ -différentielles de type  $\mu$  est l'espace des modules  $\Omega_g(\mu)$  de  $k$ -différentielles supportées sur une courbe lisse dont l'ordre au point marqué  $x_i$  est donnée par  $m_i - k$  (notons que la

---

<sup>(1)</sup>Le terme "strate" renvoie au fait que la restriction des espaces  $\overline{\Omega}_{g,n}^k(P)$  peut être stratifiée par les images de telles strates auxquelles on a appliqué le morphisme d'oubli d'une partie des points marqués.

condition sur la taille de  $\mu$  impose que la différentielle n'admet pas de zéros ou pôles hors des points marqués).

Cet espace n'est pas un fibré vectoriel mais un cône au-dessus de  $\mathcal{M}_{g,n}$  et on note  $\mathbb{P}\Omega_g(\mu)$  sa projectivisation. Ce dernier espace est lisse et de dimension

$$(30) \quad \begin{cases} (2g-2+n) & \text{si } k=1 \text{ et } \mu \in (\mathbb{N}^*)^n, \\ (2g-3+n) & \text{si } \mu \notin (k\mathbb{N}^*)^n, \\ \text{mixte} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le dernier cas l'espace a des composantes connexes de dimension  $(2g-2+n)$  correspondant à des 1-formes à la puissance  $k$  alors que les autres composantes sont de dimension  $(2g-3+n)$ . Notons enfin que dans ce texte on notera souvent  $\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$  pour  $\overline{\Omega}_{g,n}^1$  (le *fibré de Hodge*) et  $\mathcal{H}(\mu)$  les strates associées. Ces dernières sont les espaces considérés à l'avant-propos.

**2.1.2. Compactifications des strates.** — Soit  $\mu$  comme aux paragraphes précédents. Il existe plusieurs compactifications non-isomorphes de  $\mathbb{P}\Omega_g(\mu)$  avec lesquelles nous serons amenés à travailler. Mentionnons les trois plus importantes.

Il existe un morphisme canonique  $p : \mathbb{P}\Omega_g(\mu) \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  défini comme le morphisme d'oubli de la différentielle. Ce morphisme est un isomorphisme sur son-image  $\mathcal{M}_g(\mu)$  et on note  $\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)$  la clôture de Zariski de  $\mathcal{M}_g(\mu)$  dans  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . On appelle *espace des diviseurs  $k$ -canoniques de type  $\mu$*  cette première compactification (également appelée compactification de Deligne-Mumford dans la littérature).

Si  $P$  est un vecteur avec des entrées suffisamment grandes, alors on a un plongement canonique de  $\Omega_g(\mu)$  dans  $\overline{\Omega}_{g,n}^k(P)$  qui est un morphisme de cônes. La *variété d'incidence*  $\mathbb{P}\overline{\Omega}_g(\mu)$  est la clôture de Zariski de  $\mathbb{P}\Omega_g(\mu)$  dans  $\mathbb{P}\overline{\Omega}_{g,n}^k(P)$  (la géométrie de cette compactification ne dépend pas du choix du vecteur  $P$ ). Le morphisme  $p$  s'étend en un morphisme birationnel surjectif  $p : \mathbb{P}\overline{\Omega}_g(\mu) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g(\mu)$  mais celui-ci n'est pas un isomorphisme en général.

Les espaces  $\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)$  et  $\mathbb{P}\overline{\Omega}_g(\mu)$  sont singuliers en général. Dans [BCG<sup>+</sup>19a] et [CMZ19], les auteurs ont construit des désingularisations modulaires  $\overline{\Xi}_g(\mu) \rightarrow \mathbb{P}\overline{\Omega}_g(\mu)$  que l'on appelle *espace des différentielles à multi-échelles*. Nous ne décrirons pas précisément ces espaces ici mais l'existence de tels modèles lisses est un élément clé des résultats de la section 5.2.

*Graphes  $k$ -pondérés.* — Ces différentes compactifications admettent une stratification naturelle. Celles-ci sont indexées par une donnée combinatoire enrichissant la donnée de graphe stable. Si  $\Gamma$  est un graphe stable, une *fonction de  $k$ -poids* est la donnée d'une application  $w : H(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$  satisfaisant les conditions suivantes :

- *Équilibre aux nœuds* : si  $e = (h, h')$  est une arête, alors  $w(h) + w(h') = 0$ .
- *Équilibre aux sommets* : si  $v$  est un sommet on note  $w(v)$  le vecteur  $(w(h))_{h \rightarrow v} \in \mathbb{Z}^{n(v)}$  et on impose  $|w(v)| = k(2g(v) - 2 + n(v))$ .
- *Signe* : si  $e_1 = (h_1, h'_1)$  et  $e_2 = (h_2, h'_2)$  sont des arêtes entre deux sommets  $v$  et  $v'$  (potentiellement égaux) alors  $w(h_1) > 0 \Leftrightarrow w(h_2) > 0$ . On note alors  $v > v'$

- *Transitivité* : la relation  $>$  est une relation d'ordre partiel sur les sommets de  $\Gamma$  (i.e. elle est transitive).

On dit qu'une fonction de  $k$ -poids  $w$  est compatible avec  $\mu$  si les valeurs aux pattes sont données par  $w(i) = m_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On note  $T_g(\mu)$  l'ensemble des graphes  $k$ -pondérés (couple constitué d'un graphe stable et d'une fonction de  $k$ -poids) compatibles avec  $\mu$ .

Un *diviseur  $k$ -canonique tordu* est une courbe stable  $(C, x_1, \dots, x_n)$  satisfaisant la condition : il existe une fonction de  $k$ -poids sur le graphe stable de la courbe telle que l'on ait la relation

$$(31) \quad \omega_{\log}^{\otimes k} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{C}} \left( \sum_{h \in H(\Gamma)} x_h \right)$$

dans le groupe de Picard de la normalisation  $\tilde{C}$  de  $C$  (ici  $x_h$  est le point de la courbe associé à la demi-arête  $h$ ). On note  $\widetilde{\mathcal{M}}_g(\mu)$  l'espace des modules *des diviseurs  $k$ -canoniques tordus de type  $\mu$* , c'est à dire le sous-espace de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  des diviseurs  $k$ -canoniques tordus pour une fonction de poids compatible avec  $\mu$ . Cet espace admet une stratification naturelle indexée par des graphes  $k$ -pondérés :

$$(32) \quad \widetilde{\mathcal{M}}_g(\mu) = \bigsqcup_{(\Gamma, w) \in T_g(\mu)} \zeta_{\Gamma} \left( \widetilde{\mathcal{M}}_{\Gamma, w} \right),$$

où on a posé

$$(33) \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{\Gamma, w} = \prod_{v \in V(\Gamma)} \mathcal{M}_{g(v)}(w(v))$$

qui se plonge dans l'espace  $\mathcal{M}_{\Gamma}$  défini à la section (10). Dans [FP18, Sch11], Farkas, Pandharipande et Schmitt ont montré que l'espace des diviseurs  $k$ -canoniques tordus est propre. Cependant, cet espace a d'autres composantes irréductibles que  $\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)$  en général. C'est pourquoi on pose

$$(34) \quad \mathcal{M}_{\Gamma, w} = \overline{\mathcal{M}}_g(\mu) \times_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\Gamma, w}.$$

Les espaces  $\mathcal{M}_{\Gamma, w}$  fournissent une stratification de  $\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)$  indexée par les graphes  $k$ -pondérés. Dans [BCG<sup>+</sup>18] et [BCG<sup>+</sup>19b] les auteurs ont montré que l'espace  $\mathcal{M}_{\Gamma, w}$  est défini géométriquement par un ensemble d'équations appelées *contrainte des résidus globale*. On obtient également des stratifications de  $\mathbb{P}\overline{\Omega}_g(\mu)$  et  $\overline{\Xi}_g(\mu)$  en définissant les strates  $\mathbb{P}\Omega_{\Gamma, w}$  et  $\Xi_{\Gamma, w}$  comme les pré-images de  $\mathcal{M}_{\Gamma, w}$  par les morphismes d'oubli et de désingularisation.

**2.1.3. Structures spins associées.** — Soit  $\mu$  comme aux paragraphes précédents. On suppose ici que  $\mu$  est impair (i.e. toutes les entrées sont impaires). Il existe deux définitions de signe spin pour les différentielles de type  $\mu$ .

Pour la première définition on doit supposer que  $k$  est impair. Auquel cas, un élément  $(C, x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathcal{M}_g(\mu)$  définit canoniquement une structure spin :

$$L = \omega_C^{\otimes \frac{1-k}{2}} \left( \frac{m_1 - k}{2} x_1 + \dots + \frac{m_n - k}{2} x_n \right),$$

car on a

$$L^{\otimes 2} \simeq \omega_C^{\otimes(1-k)}((k-m_1)x_1 + \dots + (m_n-k)x_n) \simeq \omega_C^{\otimes(1-k)} \otimes \omega_C,$$

où le second isomorphisme découle du fait que  $(C, x_i)$  est un diviseur  $k$ -canonique de type  $\mu$ . Le signe de cette structure spin est le *signe algébrique* et on peut décomposer l'espace  $\mathcal{M}_g(\mu)$  en  $\mathcal{M}_g(\mu)^+ \sqcup \mathcal{M}_g(\mu)^-$  en fonction de ce signe.

La seconde définition du signe d'un diviseur  $k$ -canonique n'impose pas de supposer que  $k$  est impair. Étant donné un élément  $(C, x_1, \dots, x_n, \eta)$  de  $\Omega_g(\mu)$ , on peut construire un revêtement canonique de  $C$  en posant

$$\tilde{C} := \text{normalisation de la courbe } \{(x, v) \in T_C^\vee / v^k = \eta\}.$$

L'application de projection  $\tilde{C} \rightarrow C$  est un revêtement de degré  $k$ , ramifié aux singularités (zéros et pôles) de  $\eta$  et qui est équipé d'une 1-forme méromorphe dont les singularités ont la même parité que celles de  $\eta$ . De plus, cette courbe est équipée d'une structure spin et on définit le *signe plat* de  $C$  comme le signe de cette structure spin. Ce signe est invariant par déformation et conduit à une décomposition alternative de  $\Omega_g(\mu)$ . Cette définition alternative du signe est compatible avec la précédente quand  $k = 1$  mais pas pour des valeurs de  $k$  et  $\mu$  impaires générales (voir [CG22]). Cette seconde définition du signe ne sera pas considérée en général dans ce texte bien que plusieurs résultats énoncés sont valides pour les deux définitions.

*Classification des composantes connexes.* — Ces deux définitions du signe spin conduisent à l'existence de plusieurs composantes connexes des espaces  $\Omega_g(\mu)$ . La classification générale des composantes connexes n'est pas connue en dehors du cas  $k = 1$ . Si  $\mu$  est strictement positif, Kontsevich et Zorich ont montré dans [KZ03] que les espaces  $\mathcal{H}(\mu)$  ont au plus 3 composantes connexes (leurs résultats sont complétés dans [Boi15] dans le cas de  $\mu$  négatif). En effet les espaces  $\mathcal{H}(2g-1)$  et  $\mathcal{H}(g, g)$  contiennent une composante connexe  $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(\cdot)$  dont les points paramètrent des différentielles supportées sur des courbes hyper-elliptiques : les différentielles de ces strates sont les revêtements canoniques de différentielles quadratiques en genre 0 de type  $(2g-1, 1^{2g+1})$  et  $(2g, 1^{2g+2})$  respectivement (les pôles simples conduisent à des points lisses sur le revêtement). Ces deux composantes connexes sont incluses dans les composantes de signe + ou - en fonction uniquement de  $\mu$  (si celui-ci est impair). La géométrie des composantes hyper-elliptiques est relativement simple donc nous laisserons de côté le calcul des invariants associés à ces composantes bien que celui-ci soit nécessaire si l'on souhaite prouver des résultats du type du théorème 0.0.3 présenté dans l'avant-propos.

## 2.2. Surfaces plates et feuilletage d'holonomie

**2.2.1. Surfaces coniques.** — Soit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un vecteur de nombre réels positifs. Une *surface conique de type a* est une surface Riemannienne  $C$  connexe, compacte, de courbure constante avec  $n$  singularités coniques marquées d'angles  $2\pi a_i$ . D'après la formule de Gauss-Bonnet, l'intégrale de la courbure est donnée par

$$(35) \quad 2\pi (2g(C) - 2 + n - |a|).$$

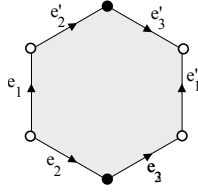


FIGURE 5. Surface plate de genre 1 avec deux singularités entières d'angles  $\frac{4}{3}\pi$  et  $\frac{8}{3}\pi$ . Celle-ci est construite à partir d'une 6-différentielle.

En particulier une surface conique est hyperbolique, plate ou sphérique si  $|a|$  est inférieur, égale ou supérieur à  $(2g(C) - 2 + n)$  respectivement.

**Exemple 2.2.1.** Une surface conique peut être construite à partir de polygones à bords géodésiques dans le disque unité, le plan euclidien ou la sphère (munis de leur métrique à courbure constante naturelle). Celle-ci est obtenue en identifiant les paires d'arêtes d'un tel polygone à condition que ces arêtes soient de même longueur géodésique. De même que pour les surfaces de translation présentées à l'avant-propos : l'angle d'une singularité de la surface est la somme des angles aux sommets envoyés sur cette singularité.

On note  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  l'espace des modules de surfaces coniques de type  $a$ , de genre  $g$  et d'aire égale à 1. Cet espace est un orbivariété réel. Lorsque  $a$  varie l'espace  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  est équipé de différentes structures différentielles et dynamiques. Un point important est l'existence d'un isomorphisme analytique réel

$$(36) \quad \mathcal{M}_{g,n}(a) \simeq \mathcal{M}_{g,n}$$

pour toute valeur de  $|a| < (2g - 2 + n)$  (voir [Thu98] et [Tro91]) ou  $|a| = (2g - 2 + n)$  (voir [McO88] et [Tro86])<sup>(2)</sup>. On note

$$\begin{aligned} \Delta_{g,n} &= \{a \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n, \text{ satisfaisant } |a| < 2g - 2 + n\}, \text{ et} \\ \partial\Delta_{g,n} &= \{a \in \mathbb{R}_{> 0}^n, \text{ satisfaisant } |a| = 2g - 2 + n\}. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\Delta_{g,n}$  correspond au domaine hyperbolique (étudié au chapitre 7) alors que  $\partial\Delta_{g,n}$  correspond au domaine plat que l'on décrit plus amplement ici.

**2.2.2. Espaces des modules de surfaces plates.** — On s'intéresse ici aux valeurs de  $a$  dans  $\partial\Delta_{g,n}$ . On rappelle ici la structure locale de l'espace des modules de surfaces plates  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  telle qu'elle a été décrite par Veech dans [Vee93].

On note  $\mathbb{U}$  le groupe des nombres complexes de norme 1. Pour décrire la géométrie locale de  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  on fixe une surface plate  $(C, x_1, \dots, x_n)$ . Une carte autour de ce point est localement modélée sur un sous espace du groupe de cohomologie relative :

$$H^1(C, \{x_1, \dots, x_n\}, \mathbb{C} \times \mathbb{U}) / \mathbb{C}^*.$$

<sup>(2)</sup>L'existence d'une tel isomorphisme n'est pas garantie dans le domaine sphérique. Ce problème est discuté en détail dans [MP16].

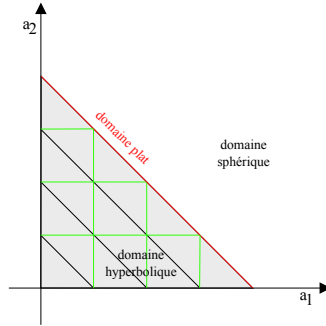


FIGURE 6. On a représenté ici les différents domaines pour  $(g, n) = 2$ . Les lignes représentent les murs des chambres de polynomialité des fonctions volumes des chapitres 5 et 7. Les lignes vertes représentent les lieux définis par  $a_i \in \mathbb{N}^*$ , le long desquels les formes volumes dégèrent. Ces phénomènes de dégénérescence traduisent l'existence de déformations isopériodiques / isomonodromiques.

Pour décrire cette carte, on fixe une représentation de la surface comme un polygone simplement connexe du plan complexe. Les arêtes forment une base de l'homologie relative aux points marqués. On obtient ainsi des nombres complexes

$$(z_1, \dots, z_{2g-1+n}, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{2g-1+n})$$

représentant les vecteurs à chacune des arêtes. La contrainte  $|z_i| = |\tilde{z}_i|$  définit un point  $e_i = \tilde{z}_i/z_i \in \mathbb{U}$ . Soit  $(z', e') = (z'_i, e'_i)_{1 \leq i \leq 2g-1+n}$  un point dans un voisinage de  $(z, e)$  dans  $H^1(C, \{x_1, \dots, x_n\}, \mathbb{C} \times \mathbb{U})$ . Ce vecteur définit une surface plate si et seulement si

$$(37) \quad \sum_{i=1}^{2g-1+n} (1 - e'_i) z'_i = 0.$$

Cette contrainte définit un sous-espace  $H \subset H^1(C, \{x_1, \dots, x_n\}, \mathbb{C} \times \mathbb{U})$ . L'espace  $H$  est muni d'une action de  $\mathbb{C}^*$  et un point de  $H/\mathbb{C}^*$  est une surface plate à isomorphisme et scalaire près. De plus, cette représentation permet également de définir un morphisme

$$H \rightarrow K \times \mathbb{U}^{2g},$$

où  $K$  est le noyau du morphisme  $\mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}$  défini comme le produit des entrées. Si la surface plate associée à  $(z', e')$  est de type  $a$  alors l'image dans  $K$  est donnée par

$$(e^{2ia_1\pi}, \dots, e^{2ia_n\pi}).$$

Si on fixe  $a \in \partial\Delta_{g,n}$ , on définit alors  $H_a$  comme la pré-image du point associé dans  $K$ . La carte locale autour de la surface plate de départ est alors définie comme  $H_a/\mathbb{C}^*$ .

On a construit cette carte à partir du choix d'une représentation de la surface plate comme un polygone du plan complexe <sup>(3)</sup>. Si l'on fixe une autre représentation, on obtient un changement de carte défini par le choix d'une base alternative du groupe d'homologie relative  $H_1(C, \{x_i\}, \mathbb{Z})$ . Notons que cette construction permet également de construire les cartes de l'espace des modules  $\widehat{\mathcal{M}}_{g,n}$  des surfaces plates d'aire 1 (sans contrainte sur les angles),

<sup>(3)</sup>Notons qu'à la donnée du polygone il faut ajouter la donnée discrète d'un marquage des ensembles de sommets pour obtenir une surface conique donnée par ce chapitre. Celui-ci n'affecte pas la construction des cartes locales.



ainsi que l'espace

$$(38) \quad \widehat{U}_{g,n} \rightarrow \widehat{U}_{g,n}/\mathbb{C}^* = \widehat{\mathcal{M}}_{g,n}$$

défini de la même manière mais sans quotienter les cartes locales par l'action de  $\mathbb{C}^*$ . Cet espace est un  $\mathbb{C}^*$ -torseur associé à un fibré en droites complexes  $\mathcal{L} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Ce fibré en droites est muni d'une métrique hermitienne  $h$  définie comme l'aire de la surface plate associée.

**2.2.3. Feuilletage d'holonomie.** — Fixons  $a \in \partial\Delta_{g,n}$ . On considère une carte  $H_a$  construite ci-dessus. On a localement<sup>(4)</sup> une application  $\text{hol} : H_a \rightarrow \mathbb{U}^{2g}$ . Cette application est submersive en tout point sauf si  $a$  est un vecteur entier et les composantes d'angles  $e_i$  sont nulles [Vee98, Theorem 0.6].

Les niveaux de cette application sont canoniquement équipés d'une structure complexe. De plus, les changements de cartes préservent les ensembles de niveaux ainsi que leur structure complexe. Ainsi, si  $a$  possède au moins une entrée non-entière, alors on a défini un feuilletage lisse sur  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  dont les feuilles sont des orbivariétés complexes de dimension  $(2g-3+n)$ .

Si  $k$  est un entier positif, on note  $\mathbb{U}_k \subset \mathbb{U}$  le sous-groupe des racines  $k$ -ièmes de l'unité. Supposons que  $ka$  est un vecteur d'entiers. Les niveaux de  $(\mathbb{U}_k)^{2g}$  sont préservés le long de changements de cartes. Les points de ces ensembles sont canoniquement équipés d'une  $k$ -différentielle méromorphe : celle-ci est définie comme  $(dz)^k$  lorsque l'on représente la surface plate comme un polygone. Cette forme différentielle a des singularités d'ordres  $k(a_i-1)$  aux points marqués. On a donc un plongement naturel

$$(39) \quad \mathcal{M}_g(ka) \hookrightarrow \mathcal{M}_{g,n}(a)$$

comme le sous-espace des surfaces plates à holonomie à valeur dans  $\mathbb{U}_k$ . La structure complexe sur  $\mathcal{M}_g(ka)$  obtenue par le feuilletage d'holonomie et celle définie par restriction de la structure complexe de  $\mathcal{M}_{g,n}$  coïncident.

**Exemple 2.2.2.** Les angles  $e_i$  de la figure 5 sont à valeur dans  $\mathbb{U}_6$ . Cet exemple est donc construit à partir d'une 6-différentielle.

**2.2.4. Deux formes volumes sur les feuilles.** — Fixons  $a \in \partial\Delta_{g,n}$ . On note

$$U_{g,n}(a) = \widehat{U}_{g,n} \times_{\widehat{\mathcal{M}}_{g,n}} \mathcal{M}_{g,n}(a).$$

Par construction, cet espace est canoniquement équipé d'une structure affine entière. La restriction de la métrique  $h$  aux cartes affines  $H_a$  construites ci-dessus est une forme hermitienne (potentiellement dégénérée). Les changements de cartes préservent la signature et le déterminant de cette forme hermitienne. On a donc une signature  $(p_a, q_a, r_a)$  et un déterminant  $\det_a$  dépendant uniquement de la valeur  $a \in \partial\Delta_{g,n}$ . Ce déterminant est donné

<sup>(4)</sup>Cette application peut être définie globalement sur l'espace de Teichmüller.

par

$$(40) \quad \det_a = \frac{(-1)^{g+n-1}}{2^{2g-2}} \prod_{i=1}^n \sin(a_i \pi).$$

On remarque d'après cette formule que cette forme hermitienne est dégénérée si et seulement si  $a$  a une entrée entière.

Soit  $\mathcal{F}$  une feuille du feuilletage d'holonomie. On note  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  la restriction de  $\mathcal{L}$  à  $\mathcal{F}$ . On peut définir deux formes volumes sur  $\mathcal{F}$  :

1. Le torseur  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^*$  est muni d'une forme volume canonique  $\nu$ . Celle-ci est défini comme la mesure de Lebesgue standard pour les coordonnées de périodes  $z_i$  décrites ci-dessus. On note  $\mathcal{L}_{\mathcal{F} \leq 1}^*$  le sous-espace des surfaces d'aire au plus 1. On note  $\nu_1$  la forme volume sur  $\mathcal{F}$  obtenue comme le poussé-en-avant de  $\nu$  le long de  $\mathcal{L}_{\mathcal{F} \leq 1}^* \rightarrow \mathcal{F}$ .
2. On note  $\nu_2$  la forme volume sur  $\mathcal{F}$  obtenue comme la puissance maximale de la courbure de la métrique d'aire.

Ces deux formes sont proportionnelles :

$$(41) \quad \nu_2 = \frac{\det_a}{4\pi^{2g-2+n}} \nu_1.$$

(voir [11]). La restriction de la forme  $\nu_1$  à un espace de  $k$ -différentielles est souvent appelée forme de *Masur-Veech* et le volume de l'espace total est le volume de Masur-Veech.

On peut utiliser le feuilletage d'holonomie pour définir une mesure sur l'espace  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$ . En effet on définit localement cette mesure comme

$$\nu_a = (\text{hol}^* \nu_{\mathbb{U}^{2g}}) \wedge \nu_1,$$

où  $\nu_{\mathbb{U}^{2g}}$  est la mesure de Haar sur le tore réel de dimension  $2g$ . Cette mesure est indépendante du choix d'une carte définie par la représentation d'une surface plate comme un polygone. On présentera au chapitre 5 comment calculer le volume de  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  pour cette mesure.

**2.2.5. Feuilletage isopériodique.** — Supposons que  $a$  a au moins une entrée entière. On a vu à la section précédente que l'espace  $U_{g,n}(a)$  est muni d'une  $U(p, q, r)$  structure. Celle-ci définit un feuilletage par feuilles complexes de dimension  $r$ . Les feuilles sont localement définies comme les translatés du sous-espace vectoriel le long duquel la forme hermitienne s'annule. Ce feuilletage est le *feuilletage isopériodique*. Celui-ci est transverse au feuilletage d'holonomie.

Pour les surfaces de translation ce feuilletage est aussi appelé feuilletage des périodes relatives et correspond à fixer les périodes de la différentielle holomorphe le long d'une base de l'homologie absolue. Sur la Figure 2, de telles déformations produiront des déformations non-triviales de toutes les périodes le long des  $e_i$  et  $\gamma_i$  car ces géodésiques représentent des cycles strictement relatifs et que le feuilletage isopériodique est de dimension 1 sur cet exemple.

## CHAPITRE 3

### CYCLES ASSOCIÉS AUX SURFACES PLATES ET LEURS RAFFINEMENTS SPINS

#### 3.1. Classes des strates

Soit  $k$  un entier positif et  $\mu$  une partition de  $k(2g-2+n)$ . Au chapitre 2 on a introduit plusieurs compactifications des espaces de diviseurs canoniques/strates de différentielles. On peut considérer les cycles suivants :

$$\begin{aligned} [\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)] &\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}), \\ \text{et } [\mathbb{P}\overline{\Omega}_g(\mu)] &\in H^*(\mathbb{P}\overline{\Omega}_{g,n}^k, \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

où la notation  $[\cdot]$  est utilisée pour la classe de cohomologie Poincaré-duale. Dans les deux cas on peut se poser les questions suivantes :

- Est-ce que ces classes sont tautologiques ? Remarquons que cette question est bien posée car les classes de Chern des fibrés de  $k$ -différentielles sont tautologiques d'après [Mum83, Bin05].
- Est-ce que ces classes sont calculables (en général cette question va de paire avec la précédente) ?
- Existe-t-il une structure générale de l'expression de ces classes ? Ces classes satisfont-elles certaines relations entre elles ?
- Peut-on calculer les intégrales de classes tautologiques ( $\psi, \kappa$  par exemple) le long de ces cycles ?

Dans le cas  $k = 1$ , les deux premiers points étaient résolus dans ma thèse de doctorat.

**Théorème 3.1.1 ([10]).** *Si  $k = 1$ , alors les classes  $[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]$  et  $[\overline{\mathcal{H}}_g(\mu)]$  sont calculables et tautologiques.*

Pour des valeurs générales de  $k$  la réponse n'est connue que dans  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  grâce aux travaux de Bae-Holmes-Pandharipande-Schmitt-Schwartz.

**Théorème 3.1.2 ([BHP<sup>+</sup>23]).** *Pour tout  $k$  la classe  $[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]$  est tautologique et calculable.*

Leurs travaux s'appuient sur la théorie des cycles de double ramification que l'on décrit plus loin. Ceux-ci permettent de montrer que les  $[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]$  varient polynomialement par morceaux en les coefficients de  $\mu_i$  (avec un nombre fini de chambres de polynomialité). En

dehors de quelques familles de cas particuliers (voir [6]) on ne sait pas à ce jour si les classes  $[\mathbb{P}\overline{\Omega}_g(\mu)]$  sont tautologiques et calculables.

*Classes signées.* — Si  $k$  et  $\mu$  sont impairs, alors on a vu au chapitre précédent qu'une courbe de  $\mathcal{M}_g(\mu)$  porte une structure spin naturelle, ce qui conduit à une décomposition de  $\mathcal{M}_g(\mu)$  en  $\mathcal{M}_g(\mu)^+ \sqcup \mathcal{M}_g(\mu)^-$ . On pose alors :

$$(42) \quad [\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]^\pm = [\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)^+] - [\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)^-] \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

Le problème est ouvert à ce jour de savoir si ces classes sont tautologiques (de même pour les classes  $[\mathbb{P}\overline{\Omega}_g(\mu)]^\pm$  définies de manière similaire).

### 3.2. Relations tautologiques de type Hodge

Dans cette section nous nous restreignons au cas  $k = 1$  pour étudier le fibré de Hodge  $\overline{\mathcal{H}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Ce fibré est de rang  $g$  et on note  $\lambda_i = c_i(\overline{\mathcal{H}}_g) \in A^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  (les classes  $\lambda$ ). Pour tout paramètre  $x$  on pose :

$$\Lambda(x) = 1 + \sum_{i \geq 1} x^i \lambda_i.$$

Les classes  $\lambda$  satisfont plusieurs propriétés remarquables :

- En appliquant la formule de Grothendieck-Riemann-Roch, Mumford a montré que ces classes sont tautologiques et calculables [Mum83].
- Par construction la classe  $\lambda_i$  dans  $R^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  est le tiré en arrière de  $\lambda_i$  dans  $R^i(\overline{\mathcal{M}}_g)$ .
- On a la relation:  $c_*(\overline{\mathcal{H}}_{g,n}^\vee) = c^*(\overline{\mathcal{H}}_{g,n})^{-1}$ . Autrement dit :

$$(43) \quad \Lambda(x) \Lambda(-x) = 1$$

pour tout  $x$  complexe. En particulier  $\lambda_g^2 = \delta_{g,0}$ .

- Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $R_j^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  le sous-espace vectoriel de  $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  engendré par les classes associés à des graphes avec au plus  $j$  boucles<sup>(1)</sup>. Pour toute classe  $\gamma$  dans  $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \setminus R_j^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ , on a  $\lambda_{g-j} \gamma = 0$ .
- Dans [JPPZ17] les auteurs ont montré que la classe  $\lambda_g$  peut être exprimée comme une combinaison linéaire de classes définies à l'aide de graphes stables sans arête séparante (i.e. telle que le graphe est déconnecté si on la retire).

Soit  $Z = (z_1, \dots, z_n)$  un vecteur dans  $\mathbb{N}^n$ . On note  $A_g(Z)$  le lieu dans  $\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$  des différentielles supportées sur des courbes lisses et avec un zéro d'ordre  $z_i$  au point marqué  $x_i$ . Ces lieux généralisent les lieux  $\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}_g(\mu)$  car on n'impose pas ici la contrainte  $|Z| = 2g - 2$ . Dans [10], j'ai montré que  $[\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}_g(\mu)]$  était tautologique et calculable en décrivant un algorithme explicite permettant de calculer les classes  $[\overline{A}_g(Z)]$  (la classe de la clôture de Zariski de  $A_g(Z)$ ).

Dans [7] nous avons amélioré ce résultat avec Politopoulos en montrant que l'algorithme décrit dans [10] permet de calculer de manière univoque des classes

$$\alpha_g(Z) \in R^*(\overline{\mathcal{M}}, \mathbb{Q})[\xi]$$

<sup>(1)</sup>Cette notation permet de définir une structure d'algèbre filtrée sur  $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ .

telles que  $\alpha_g(Z) = [\overline{A}_g(Z)]$  lorsque l'on passe au quotient par la relation  $\Lambda(\xi) = 0$ . Ce résultat nous permet de produire des relations tautologiques pour tout  $Z$  de taille strictement plus grande que  $2g - 2$ . En effet, dans ce cas, le lieu  $\overline{A}_g(Z)$  est vide et donc  $\alpha_g(Z) = 0$  dans  $R^*(\overline{\mathcal{H}}_{g,n})$ . Nous appelons ces relations tautologiques *relations de type Hodge*. Les deux problèmes suivants sont ouverts :

- Est-ce que les relations de type Hodge sont des combinaisons linéaires de relations de Pixton-Faber-Zagier ?
- Si oui, est-ce qu'elles engendrent les relations de Pixton-Faber-Zagier ?

En considérant une sous-famille des relations de Hodge, on obtient une nouvelle méthode pour calculer les classes  $\lambda$ . Celle-ci est a priori indépendante de la formule originale de Mumford. Pour obtenir ces expressions des classes  $\lambda$ , on considère la classe

$$(44) \quad \alpha_g = \pi_{g-2*} \alpha_g(1, 2^{g-1}) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,1}, \mathbb{Q})[\xi],$$

où  $\pi_{g-2}$  est le morphisme d'oubli de  $(g-1)$  point marqués. Cette classe est de degré  $g$  et le coefficient de  $\xi^g$  est égal à  $(2^{g-1}g!)$ . Comme la classe  $\alpha_g$  est nulle dans  $H^*(\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}_{g,1}, \mathbb{Q})$ , on a

$$(45) \quad \alpha_g = 2^{g-1}g! (\xi^g + \lambda_1 \xi + \dots + \lambda_g).$$

En décrivant précisément les termes apparaissant dans cette formule on obtient le résultat suivant.

**Théorème 3.2.1 ([7]).** *Pour tout  $0 \leq j \leq g$ , et pour toute classe tautologique  $\gamma$ , la classe  $\lambda_{g-j} \gamma$  appartient à  $R_j^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ .*

Le cas particulier  $j = 0$  de ce théorème avait été conjecturé dans [BGR19].

### 3.3. Cycles de double ramification

Fixons  $k \geq 1$  et  $\mu \in \mathbb{Z}^n$  de taille  $k(2g-2+n)$ . On suppose ici que  $\mu$  a au moins une entrée négative et/ou non divisible par  $k$ .

**3.3.1. Expression à partir des graphes  $k$ -étoilés.** — Comme mentionné en section 2.1.2, l'espace  $\widetilde{\mathcal{M}}_g(\mu)$  construit par Farkas-Pandharipande-Schmitt possède plusieurs composantes irréductibles. Sous l'hypothèse que  $\mu \notin (k\mathbb{N}^*)^n$  les composantes irréductibles de cet espace sont toutes de dimensions  $(2g-3+n)$ . Ces composantes sont indexées par la donnée d'un *graphe  $k$ -étoilé*, i.e. de  $(\Gamma, w, v_0)$  où :

- $(\Gamma, w)$  est un graphe  $k$ -pondéré compatible avec  $\mu$ ;
- toutes les arêtes de  $\Gamma$  sont entre  $v_0$  (le sommet *central*) et un sommet  $v \neq v_0$  (un sommet *extérieur*) ;
- les valeurs de la fonction  $w$  aux demi-arêtes adjacentes aux sommets extérieurs sont positives et divisibles par  $k$ .

On note  $\text{Star}_g(\mu)$  l'ensemble des graphes  $k$ -étoilés compatibles avec  $\mu$ .

Un point générique d'une composante irréductible indexée par un tel graphe est un diviseur canonique tordu satisfaisant : pour chaque sommet extérieur  $v$  le diviseur  $k$ -canonique

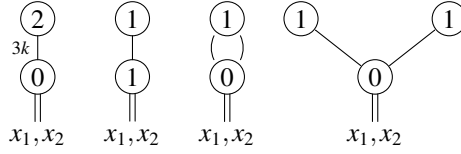


FIGURE 7. Si  $(g, n) = (2, 2)$  et on suppose que  $\mu$  n'est pas divisible par  $k$  alors il y a 4 graphes  $k$ -étoilés. Le sommet le plus bas est le sommet central (remarquons que les marquages sont contraints d'être sur ce sommet par hypothèse). Les poids aux demi-arêtes incidentes au sommets extérieurs sont tous égaux à  $k$  sauf pour le premier graphe où celui-ci est égal à  $3k$ .

est un diviseur 1-canonique (pour le vecteur  $\frac{w(v)}{k}$ ). On définit alors le cycle de double ramification dans  $A^g(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  comme la somme pondérée des composantes irréductibles suivante :

(46)

$$\mathrm{DR}_g(\mu) = \sum_{(\Gamma, w, v_0) \in \mathrm{Star}_g(\mu)} \frac{k^{|\mathrm{V}(\Gamma)|-1}}{|\mathrm{Aut}(\Gamma, w)|} \zeta_{\Gamma^*} \left( [\overline{\mathcal{M}}_{g(v_0)}(w(v_0))] \times \prod_{v \in \mathrm{Ext}(\Gamma, w, v_0)} \left[ \overline{\mathcal{M}}_{g(v)} \left( \frac{w(v)}{k} \right) \right] \right),$$

où  $\mathrm{Ext}(\Gamma, w, v_0)$  est l'ensemble des sommets extérieurs.

**3.3.2. Classes de Pixton.** — Soit  $r > 0$ . Une structure  $r$ -spin de type  $(k, \mu)$  sur une courbe lisse marquée  $(C, x_1, \dots, x_n)$  est un fibré en droites  $L \rightarrow C$  satisfaisant :

$$L^{\otimes r} \simeq \omega_{\log}^{\otimes k}(-m_1 x_1 \dots - m_n x_n).$$

Ces structures généralisent les structures 2-spins introduites au chapitre 1. On note  $\mathcal{M}_{g,\mu}^{k,1/r}$  l'espace des modules des courbes  $r$ -spins de type  $(k, \mu)$ . Le morphisme d'oubli  $\epsilon : \mathcal{M}_{g,\mu}^{k,1/r} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  est étale et de degré  $r^{2g-1}$  <sup>(2)</sup>. De plus, cet espace admet une compactification lisse que l'on notera  $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{k,1/r}$  et une extension du morphisme  $\epsilon$  à valeur dans  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Enfin, cet espace admet une courbe universelle et une structure spin universelle :

(47)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & & \\ & \searrow & \\ & \overline{\mathcal{C}}_{g,\mu}^{k,1/r} & \\ & \pi \downarrow & \\ & \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{k,1/r} & \xrightarrow{\epsilon} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}. \end{array}$$

On va s'intéresser aux classes

$$(48) \quad c_{g,d}(\mu, r) = r \epsilon_* c_d(-R^* \pi_* \mathcal{L}) \in A^d(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}).$$

De même que les classes de Hodge considérées en section 3.2, ces classes sont calculables et tautologiques en appliquant la formule de Grothendieck-Riemann-Roch [Chi08]. En utilisant la théorie des polynômes d'Ehrhart, Pixton a construit la famille de classes suivantes.

<sup>(2)</sup>Il y a  $r^{2g}$  preimages d'un point générique mais chaque courbe spin admet une action de  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  que l'on doit prendre en compte dans le calcul du degré.

**Proposition-Définition 3.3.1** ([JPPZ17]). *Pour tout  $g, d$  et  $\mu$  les classes  $c_{g,d}(\mu, r)$  dépendent polynomialement de  $r$  pour  $r$  suffisamment large. Le coefficient de degré 0 de ce polynôme est  $P_{g,d}(\mu)$  est la classe de Pixton.*

Notons que les classes de Pixton sont explicitement calculables. En effet, pour une valeur de  $r$  fixée, la formule de GRR permet d'exprimer la classe  $c_{g,d}(\mu, r)$  de manière explicite comme l'image d'un élément de l'algèbre des strates ; puis, par interpolation de Lagrange, on obtient un polynôme explicite dans  $S^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})[r]$  dont on peut extraire le coefficient de degré 0. Cet algorithme est implémenté sur SAGE et permet l'usage de l'outil informatique pour des expériences et preuves en bas genre (voir [DSvZ20]).

La propriété suivante des classes de Pixton a été annoncée par Pixton et Zagier et prouvée dans [Pix, Spe24]:

**Proposition 3.3.2.** *Pour tout  $g, d \geq 0$ , la classe  $P_{g,d}$  est un polynôme de degré  $2d$  en les entrées de  $\mu$ .*

Le résultat central de [BHP<sup>+</sup>23] est l'expression des cycles de double ramification à l'aide des classes de Pixton.

**Théorème 3.3.3.** *On a la relation  $DR_g(\mu) = P_{g,g}(\mu)$  in  $A^g(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ .*

**3.3.3. Cycles de double ramification signés.** — Ici on suppose que  $k$  et  $\mu$  sont impairs. Dans ce cas, on a vu en début de chapitre que l'on peut définir une classe  $[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]^\pm$  comme la différence des contribution des objets avec un signe spin + et -. Dans [4], nous avons proposé avec Costantini et Schmitt une définition des cycles de double ramification incluant les signes spins. Pour définir cette classe on considère le sous-ensemble  $\text{Star}_g^{\text{odd}}(\mu) \subset \text{Star}_g(\mu)$  des graphes  $k$ -étoilés dont la fonction de poids ne prend que des valeurs impaires. Le cycle de double ramification signé est la classe dans  $A^g(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$  définie comme suit :

$$(49) \quad DR_g^\pm(\mu) = \sum_{(\Gamma, w) \in \text{Star}_g^{\text{odd}}(\mu)} \frac{k^{|\Gamma| - 1}}{|\text{Aut}(\Gamma, w)|} \zeta_{\Gamma^*} \left( \left[ \overline{\mathcal{M}}_{g(v_0)}(w(v_0)) \right]^\pm \times \prod_{v \in \text{Ext}(\Gamma, w, v_0)} \left[ \overline{\mathcal{M}}_{g(v)} \left( \frac{w(v)}{k} \right) \right]^\pm \right).$$

A l'instar des cycles de double ramification classiques, on conjecture que ces cycles sont exprimables en fonctions de classes tautologiques. Plus précisément, on considère les espaces de structures  $r$ -spins pour des valeurs de  $r$  paires. Dans ce cas, l'espace des structures  $r$ -spins  $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{k,1/r}$  admet une application vers l'espace des structures (2-)spins  $\overline{\mathcal{S}}_g$  défini au chapitre 1. Cette application est définie par :

$$(50) \quad (C, L, x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( C, L^{\otimes r/2} \otimes \omega_{\log}^{\otimes \frac{k+1}{2}} \left( \frac{m_1 - k}{2} x_1, \dots, \frac{m_n - k}{2} x_n \right) \right).$$

On peut donc considérer les classes :

$$(51) \quad c_{g,d}^\pm(\mu, r) = r \epsilon_* c_d^\pm(-R^* \pi_* \mathcal{L}) \in A^d(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}).$$

En appliquant les résultats de Pixton, on peut montrer que ces classes dépendent polynomialement de  $r$  pour  $r$  suffisamment large. On définit alors la classe de Pixton signée  $P_{g,d}^\pm(\mu)$

comme le coefficient constant de ce polynôme. Nous avons donc proposé la conjecture suivante.

**Conjecture 3.3.4.** (voir [4]) *On a l'égalité  $P_{g,g}^{\pm}(\mu) = DR_g^{\pm}(\mu)$ .*

Les cycles de double ramification signés et classiques sont exprimables à partir des classes de strates de différentielles. Dans le cas classique, Farkas-Pandharipande avaient montré que la réciproque est valide : on peut calculer les classes  $[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]$  à partir des cycles de double ramification et donc montrer qu'elles sont calculables, tautologiques et dépendent de manière polynomiale par morceaux en les entrées de  $\mu$  en utilisant la proposition 3.3.2 (voir [11]). Cependant, leur preuve repose sur une astuce qui ne peut être transposée pour les cycles de double ramification signés. La conjecture 3.3.4 ne permet donc pas pour l'instant de calculer les classes de strates de  $k$ -différentielles signées.

**3.3.4. Strates et classes de Witten.** — Ici on suppose que  $k = 1$  et que  $\mu$  est un vecteur d'entiers positifs de taille  $(2g - 2 + n)$ . Dans [Wit93], Witten a conjecturé l'existence de classes

$$W_g(\mu, r) \in A^{g-1}(\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{1/r}, \mathbb{Q})$$

dont la théorie de l'intersection satisfait une structure combinatoire remarquable. Plus précisément, Witten a conjecturé que les intégrales de classes  $\psi$  le long de ces classes permettaient de construire des solutions de la hiérarchie  $r$ -KdV. Cette conjecture généralisait sa célèbre conjecture précédente prouvée par Kontsevich : la série génératrice des intégrales de classes  $\psi$  est une solution de l'équation KdV (voir [Wit91, Kon92] et le chapitre 7 pour une preuve alternative de cette conjecture).

Plusieurs constructions équivalentes de la classe de Witten ont été proposées depuis (voir [PV01, Chi06, KL20]). Chacune de ces constructions nécessite d'introduire des structures géométriques supplémentaires pour extraire la classe de Witten. Par ailleurs, la conjecture  $r$ -KdV a été résolue par Faber-Shadrin-Zvonkine (voir [FSZ10]).

Dans [Pol06], Polishchuk a observé que la classe de Witten ne pouvait s'exprimer à l'aide des classes  $c_d(-R^* \pi_* \mathcal{L})$  présentée à la section précédente. De plus il a montré par des exemples que la différence entre ces deux classes devait être reliée aux classes de strates  $[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]$ . Ces observations ont été transformées en une conjecture précise dans [PPZ16]. Tout d'abord les auteurs ont prouvé que les classes  $r \in_* W_g(\mu, r)$  dépendent polynomialement de  $r$  pour  $r$  suffisamment large. Ceci conduit à la définition de la classe de Pixton-Witten

$$PW_g(\mu) \in A^{g-1}(\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}, \mathbb{Q})$$

comme le degré 0 de ce polynôme. Ils ont alors formulé la conjecture suivante.

**Conjecture 3.3.5.** *On a l'égalité  $PW_g(\mu) = (-1)^g [\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]$ .*

Cette conjecture a motivé le travail [3] en commun avec Chen-Janda-Ruan. Dans cet article, nous fournissons une nouvelle construction de la classe de Witten basée sur la théorie de la localisation par co-section développée par Kiem et Li (voir [KL13]). Cette construction



nécessite de considérer l'espace

$$(52) \quad \mathcal{U}_{g,\mu}^{1/r} \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_* \mathcal{L} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{1/r},$$

i.e. l'espace des modules de structures  $r$ -spins munies d'une section holomorphe spécifique. On note  $p : \mathcal{U}_{g,\mu}^{1/r} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{1/r}$  l'application d'oubli de la section. On a un plongement naturel  $s_0 : \overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{1/r} \hookrightarrow \mathcal{U}_{g,\mu}^{1/r}$  défini en munissant chaque structure  $r$ -spin de la section nulle.

On considère maintenant le faisceau  $p^*(R^1\pi_*\mathcal{L})$ . Ce faisceau paramètre les obstructions à la déformation de la section holomorphe. De plus, celui-ci est muni d'une co-section globale

$$p^*(R^1\pi_*\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{g,\mu}^{1/r}}$$

définie par la dualité de Serre. Cette co-section s'annule exactement le long de l'image de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{1/r}$  par la section  $s_0$ . À partir de cette donnée, le formalisme de co-section permet de construire un cycle  $[\mathcal{U}_{g,\mu}^{1/r}]^{\text{loc}}$  dans  $A^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,\mu}^{1/r}, \mathbb{Q})$ .

**Théorème 3.3.6 ([KL20]).** *On a l'égalité  $W_g(\mu, r) = [\mathcal{U}_{g,\mu}^{1/r}]^{\text{loc}}$ .*

Cette construction est élégante mais ne permet pas des calculs explicites. Dans [3], nous avons construit une compactification  $\overline{\mathcal{U}}_{g,\mu}^{1/r}$  de l'espace  $\mathcal{U}_{g,\mu}^{1/r}$  à partir de la géométrie logarithmique. Nous avons étendu à cet espace la construction du faisceau d'obstruction aux déformations de sections ainsi que la co-section associée. Ce nouvel espace a l'avantage notable d'être muni d'une action de  $\mathbb{C}^*$  définie par re-normalisation de la section holomorphe. Cette action permet d'utiliser des résultats de localisation de type Atiyah-Bott et d'exprimer la classe de Witten à partir de la contribution "à l'infini" de la co-section. Dans [CJR21], Chen-Janda-Ruan ont conjecturé une formule de localisation explicite pour une classe d'espaces incluant l'espace  $\overline{\mathcal{U}}_{g,\mu}^{1/r}$ . Cette formule de localisation fournirait une preuve de la Conjecture 3.3.5.

*Classes signées.* — Si l'on suppose que  $\mu$  est pair, alors on peut définir une classe de Witten signée  $W_g^\pm(\mu, r)$  (pour les valeurs de  $r$  paires) et une classe de Pixton-Witten signée  $PW_g^\pm(\mu)$ . On peut alors conjecturer l'égalité  $[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]^\pm = (-1)^g PW_g^\pm(\mu)$  comme dans le cas non signé. Cette conjecture découle également de la formule de localisation proposée par Chen-Janda-Ruan.

Les classes de Witten classiques forment une théorie cohomologique des champs (CohFT) qui peut être calculée explicitement en appliquant le théorème de reconstruction de Teleman (voir [Tel12, PPZ15]). Ce théorème permet de calculer les CohFTs dites semi-simples. Les classes de Witten ne forment pas une CohFT semi-simple. Pour contourner ce problème, Dubrovin a introduit la notion de variété de Frobenius permettant de décrire les déformations de CohFTs [Dub96]. La CohFT définie par les classes de Witten admet un espace de déformation naturel dont les points génériques définissent des CohFT semi-simples. Il est donc possible d'appliquer le théorème de Teleman en ces points semi-simples et calculer la classe de Witten en prenant la limite de ces expressions. En revanche, les classes de Witten signées ne forment pas des CohFTs, donc il est a priori impossible d'appliquer le théorème de reconstruction de Teleman. La relation conjecturale entre classes de Witten

et classes de strates signées ne permet donc pas à ce jour de calculer les classes de strates signées.

### 3.4. Intégrales de classes $\psi$

On s'intéresse ici au calcul d'intégrales de produits de classes  $\psi$  sur les cycles de double ramification et classes de strates. L'outil principal pour réaliser ce type de calculs sont les *formules de séparation*. Soit  $k > 0$  et  $\mu$  une partition de  $2g-2+n$  et soient  $i$  et  $j$  deux valeurs distinctes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On note  $T_g^{i,j}(\mu) \subset T_g(\mu)$  l'ensemble des graphes  $k$ -pondérés tels que:

- le graphe a deux sommets et les pattes  $i$  et  $j$  sont adjacentes à chacun des deux sommets notés  $v_i$  et  $v_j$  respectivement ;
- toutes les arêtes sont entre  $v_i$  et  $v_j$  et on a  $v_i > v_j$  ou  $v_j < v_i$ .

**Proposition 3.4.1.** *On a l'égalité suivante dans  $R^{g+1}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$  :*

$$(53) \quad (m_i \psi_i - m_j \psi_j) \text{DR}_g(\mu) = \sum_{(\Gamma, w) \in T_g^{i,j}(\mu)} \frac{\pm m(\Gamma, w)}{|\text{Aut}(\Gamma, w)|} \zeta_{\Gamma^*} \left( \text{DR}_{g(v_i)}(w(v_i)) \otimes \text{DR}_{g(v_j)}(w(v_j)) \right),$$

où le signe est  $+$  si  $v_j > v_i$  et  $-$  sinon. Par ailleurs, si  $k$  et  $\mu$  sont impairs et si  $m_i$  et  $m_j$  ne sont pas des entiers positifs divisibles par  $k^{(3)}$  alors on a l'égalité :

$$(54) \quad (m_i \psi_i - m_j \psi_j) \text{DR}_g^{\pm}(\mu) = \sum_{(\Gamma, w) \in \text{OT}_g^{i,j}(\mu)} \frac{\pm m(\Gamma, w)}{|\text{Aut}(\Gamma, w)|} \zeta_{\Gamma^*} \left( \text{DR}_{g(v_i)}^{\pm}(w(v_i)) \otimes \text{DR}_{g(v_j)}^{\pm}(w(v_j)) \right)$$

où  $\text{OT}_g^{i,j}(\mu)$  est le sous-ensemble de  $T_g^{i,j}(\mu)$  des graphes impairs et avec la même règle de choix de signe.

On introduit les fonctions suivantes

$$(55) \quad \mathcal{A}_g(\mu) = \int_{\text{DR}_g(\mu)} \psi_1^{2g-3+n},$$

$$(56) \quad \text{et } \mathcal{A}_g^{\pm}(\mu) = \int_{\text{DR}_g^{\pm}(\mu)} \psi_1^{2g-3+n}$$

(quand  $\text{DR}_g^{\pm}(\mu)$  est défini pour la deuxième ligne). En utilisant la proposition 3.4.1, on peut réduire le calcul des intégrales de monômes en classes  $\psi$  au calcul des fonctions  $\mathcal{A}_g$  et  $\mathcal{A}_g^{\pm}$  : pour un monôme général, on peut progressivement remplacer les  $\psi_j$  par  $\psi_1$  et des intégrales sur des cycles de double ramification de dimension plus faible. Le théorème suivant prouvé avec Costantini et Schmitt fournit une formule fermée pour ces fonctions.

**Théorème 3.4.2 ([4]).** *Pour tout  $g$  on a*

$$(57) \quad \mathcal{A}_g(\mu) = [z^{2g}] \exp \left( m_1 z \frac{\mathcal{S}'(kz)}{\mathcal{S}(kz)} \right) \frac{\prod_{i=2}^n \mathcal{S}(m_i z)}{\mathcal{S}(z) \mathcal{S}(kz)^{2g-1+n}},$$

<sup>(3)</sup>Cette hypothèse peut être retirée que si l'on suppose la Conjecture 3.3.4 valide.

où  $[z^k]$  dénote l'opérateur d'extraction du coefficient de  $z^k$  dans une série formelle en  $z$  et  $\mathcal{S}(z) = \frac{\sinh(z/2)}{z/2}$ . De plus si on suppose la conjecture 3.3.4 valide, alors on a

$$(58) \quad \mathcal{A}_g^\pm(\mu) = [z^{2g}] 2^{-g} \exp\left(m_1 z \frac{\mathcal{S}'(kz)}{\mathcal{S}(kz)}\right) \frac{\cosh(z/2) \prod_{i=2}^n \mathcal{S}(m_i z)}{\mathcal{S}(z) \mathcal{S}(kz)^{2g-1+n}}.$$

Un point crucial de la preuve est le fait que la fonction  $\mathcal{A}_g$  est un polynôme de degré  $2g$  en les  $m_i$  (si l'on voit  $k$  comme une fonction des  $m_i$ ). De plus si l'on effectue le changement de variable  $y_i = m_i - k$ , alors on a l'identité  $\mathcal{A}_g(y_1, \dots, y_n, 0) = \mathcal{A}_g(y_1, \dots, y_n)$ . Cette propriété implique que la fonction  $\mathcal{A}_g$  est un polynôme symétrique de degré  $2g$  et donc vit dans un espace vectoriel de dimension finie. En utilisant la formule de séparation de la proposition 3.4.1, on dérive un ensemble fini de contraintes satisfaites par ces polynômes et qui les déterminent de manière univoque.

**Remarque 3.4.3.** On peut considérer le problème plus général d'exprimer des intégrales de produits de classes  $\psi_i$  pour différentes valeurs de  $i$ . Ce problème est résolu dans [BSSZ15] pour le cas  $k = 0$ . L'un des éléments clés pour "deviner" et prouver de telles formules est le formalisme d'opérateur rappelé au chapitre suivant. Un tel formalisme pour  $k \neq 0$  n'existe pas encore à notre connaissance.

Le calcul de  $\mathcal{A}^\pm$  suit la même logique à partir du moment où l'on suppose la conjecture 3.3.4 valide. Remarquons qu'en utilisant les expressions des cycles de doubles ramification (46) et (49), on a les égalités :

$$(59) \quad \mathcal{A}_g(\mu) = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]} \psi_1^{2g-3+n} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_g^\pm(\mu) = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_g(\mu)]^\pm} \psi_1^{2g-3+n}$$

si l'entrée  $m_1$  n'est pas un multiple positif de  $k$ . En particulier, il est possible de calculer les intégrales de monômes en classes  $\psi$  sur les strates signées bien qu'il n'y ait pas à l'heure actuelle de méthode (même conjecturale) d'exprimer les classes de ces strates.



## CHAPITRE 4

### ALGÈBRE DES FONCTIONS (SUPER-)SYMÉTRIQUES ET NOMBRES D'HURWITZ (SPINS)

#### 4.1. Algèbre des fonctions symétriques décalées

**4.1.1. Nombres d'Hurwitz.** — Soit  $X$  une courbe de genre  $h$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ . Une partition de  $d$  est une suite finie d'entiers positifs décroissante  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^\ell)$  satisfaisant  $|\eta| = d$ . On note  $\mathcal{P}(d)$  l'ensemble des partitions de  $d$  et  $\mathcal{P}$  l'ensemble de toutes les partitions. Un automorphisme d'une partition est une permutation de  $\{1, \dots, \ell\}$  préservant les valeurs  $\eta_i$ .

On fixe un *profil de ramification*  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ , i.e. une liste de partitions de  $d$ , où  $\eta_i = (\eta_i^j)_{1 \leq j \leq \ell_i}$  pour  $1 \leq i \leq n$ , ainsi que des points  $x_1, \dots, x_n$  de  $X$ . Un revêtement de profil  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  est la donnée de :

- une courbe  $C$  lisse (non-nécessairement connexe) ;
- une application  $f : C \rightarrow X$  qui ne contracte aucune composante ;
- des points marqués  $x_{i,j}$  de  $C$  tels que :  $f(x_{i,j}) = x_i$  et  $\text{ord}_{x_{i,j}} f = \eta_i^j$ .

Remarquons que le genre de la courbe source est contraint par la formule de Riemann-Hurwitz. Les automorphismes du revêtement sont les automorphismes de  $C$  commutant avec  $f$  et préservant les points marqués. Le groupe de ces automorphismes est fini. De plus, pour un profil donné il y a un nombre fini de revêtements à automorphisme près. Le *nombre d'Hurwitz* est alors défini comme

$$(60) \quad H_d^X(\eta_1, \dots, \eta_n) := \sum_{[f: C \rightarrow X]} \frac{1}{|\text{Aut}(f)|},$$

i.e. le nombre de classes de revêtements de  $X$  de profil  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ , comptés avec des poids  $|\text{Aut}(f)|^{-1}$ . Par ailleurs, on étend cette définition des nombres d'Hurwitz à  $d = 0$  et aux choix de partitions générale (non nécessairement dans  $\mathcal{P}(d)$ ) de la façon suivante :

- $H_0^X(\emptyset, \dots, \emptyset) = 1$  ;
- $H_d^X(\eta_1, \dots, \eta_n) = 0$  si l'une des partitions  $\eta_i$  est de taille supérieur à  $d$  ;
- sinon, on définit :

$$(61) \quad H_d^X(\eta_1, \dots, \eta_n) = H_d^X(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_n) \prod_{i=1}^n \binom{m_1(\tilde{\eta}_i)}{m_1(\eta_i)},$$

où l'on note  $m_1(\eta)$  pour le nombre de 1 dans une partition  $\eta$ , et on définit  $\tilde{\eta}$  comme la partition obtenue à partir de  $\eta_i$  en ajoutant des 1 pour en avoir  $d$ .

*Définition à partir des représentations du groupe symétrique.* — On rappelle que les représentations irréductibles et classes de conjugaisons du groupe symétrique  $S_d$  sont en bijection avec les partitions de  $d$ . Si  $\eta$  et  $\lambda$  sont des partitions satisfaisant  $|\eta| \leq |\lambda|$  alors on note :

- $C_\eta$  la classe de conjugaison indexée par  $\eta$  ;
- $\dim(\lambda)$  la dimension de la représentation irréductible indexée par  $\lambda$  ;
- $\chi_\eta^\lambda$  l'évaluation de la trace d'un élément de  $C_\eta$  pour la représentation  $\lambda$ .

Avec ces éléments on définit :

$$(62) \quad f_\eta(\lambda) = \frac{|\lambda|}{|\eta|} |C_\eta| \frac{\chi_\eta^\lambda}{\dim(\lambda)}.$$

Avec cette notation, on a l'expression suivante due à Burnside :

$$(63) \quad H_d^X(\eta_1, \dots, \eta_n) = \sum_{|\lambda|=d} \left( \frac{\dim(\lambda)}{d!} \right)^{2-2h} \prod_{i=1}^n f_{\eta_i}(\lambda).$$

La preuve de cette formule repose sur l'équivalence entre la donnée d'un revêtement ramifié  $f : C \rightarrow X$  et de la représentation de monodromie associée :  $M_f : \pi(X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \rightarrow S(d)$  (voir [LZ04]).

**4.1.2. Fonctions symétriques décalées.** — L'action décalée de  $S_d$  sur l'algèbre de polynômes  $\mathbb{Q}[\lambda_1, \dots, \lambda_d]$  est définie par la permutation des variables  $\lambda_i - i$ . L'algèbre des fonctions symétriques décalées est la limite projective des espaces de polynômes invariants pour cet action

$$(64) \quad \Lambda^* = \varprojlim \mathbb{Q}[\lambda_1, \dots, \lambda_d]^{S_d},$$

où l'on utilise les morphismes de  $d$  à  $d-1$  qui envoient la variable  $\lambda_d$  sur 0. La graduation de cette algèbre est induite par la graduation usuelle des polynômes.

Les fonctions  $f_\eta$  définies à la section précédente sont des fonctions symétriques décalées de degré  $d$ . Plus important, ces fonctions forment une base de  $\Lambda^*$ . Si l'on dénote par  $\mathcal{P}^\mathbb{Q}$  l'algèbre des fonctions sur l'ensemble des partitions, alors on a un isomorphisme :

$$(65) \quad \begin{aligned} \phi : \mathcal{P}^\mathbb{Q} &\rightarrow \Lambda^* \\ (\mu) &\mapsto f_\mu \end{aligned}$$

(où  $(\mu)$  dénote la fonction duale de  $\mu$ ).

*Somme de puissances.* — Il existe une base alternative de l'algèbre  $\Lambda^*$  construite à partir des fonctions *sommes de puissances* définies pour  $k \geq 1$  par

$$(66) \quad p_k(\lambda) = k! b_{k+1} + \sum_{i=1}^n (\lambda_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k,$$

$$(67) \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}(z)^{-1} = \frac{z/2}{\sinh(z/2)} = \sum_{k \geq 0} b_k z^k.$$

Avec cette notation, on a l'identification  $\Lambda^* \simeq \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$ . Cette identification vient avec une graduation alternative définie en assignant à la fonction  $p_k$  le poids  $k+1$ . Les formules pour passer d'une base à l'autre sont décrites dans [KO94]. Donnons simplement l'expression des premières fonctions  $f$  :

$$(68) \quad f_1 = p_1 + \frac{1}{24}, \quad f_2 = \frac{1}{2}p_2, \quad f_3 = \frac{1}{3}p_3 - \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{3}{8}p_1 + \frac{9}{640}.$$

On remarque sur ces exemples que l'élément  $f_k$  est de poids au plus  $k$ . Cette observation motive l'introduction d'une troisième base de l'algèbre  $\Lambda^*$  construite à partir des fonctions suivantes :

$$(69) \quad h_k = \frac{-1}{k} [u^{k+1}] P(z)^k, \quad \text{où } P(z) = \exp\left(-\sum_{s \geq 1} u^{s+1} p_s\right)$$

On a alors  $\Lambda^* \simeq \mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n]$  et il est facile de remarquer que les  $h_k$  sont de poids pur  $k+1$ . On a la proposition suivante prouvée par Eskin et Okounkov.

**Proposition 4.1.1** ([EO01]). *La différence  $f_k - h_k/k$  est de poids au plus  $k-1$ .*

Autrement dit la fonction  $h_k$  est la partie de plus haut poids de  $kf_k$ .

## 4.2. Groupes de Sergeev et fonctions super-symétriques

**4.2.1. Nombres d'Hurwitz spins.** — Une partition est *stricte* si aucune valeur n'apparaît deux fois. C'est une partition est *impaire* si toutes les valeurs sont impaires. On note  $\mathcal{SP}$  et  $\mathcal{OP}$  les ensembles de partitions strictes et impaires respectivement.

Pour définir les nombres d'Hurwitz spins, on fixe une courbe spin lisse  $L \rightarrow X$ , un degré  $d$  et un *profil impair*  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ , i.e. une liste de partitions impaires de  $d$ . Si  $(C, x_{i,j}, f : C \rightarrow X)$  est un revêtement pour ce profil, alors on note  $L_f$  le fibré en droites :

$$(70) \quad f^*L \otimes \mathcal{O}_C \left( \sum_{i,j} \frac{\eta_i^j - 1}{2} x_{i,j} \right).$$

Ce fibré est une structure spin sur  $C$  par construction. On définit les nombres d'Hurwitz spins comme la somme pondérée suivante :

$$(71) \quad H_d^{X,L}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \sum_{[f:C \rightarrow X]} \frac{(-1)^{h^0(L_f)}}{|\text{Aut}(f)|}.$$

On étend de la même manière que pour les nombres d'Hurwitz classiques la définition de  $H_d^{X,L}$  à  $d=0$  et à des partitions de tailles quelconques.

**4.2.2. Groupes de Sergeev.** — De même que les nombres d'Hurwitz classiques, les nombres d'Hurwitz spins ne dépendent que de la donnée topologique  $(X, L)$  et donc uniquement du genre de  $X$  et de la parité de  $L$ . On va voir que ces nombres s'expriment à partir de la théorie des représentations de groupes appelés groupes de Sergeev, dont on commence par rappeler la définition.

Soit  $f : C \rightarrow X$  un revêtement ramifié de degré  $d$  pour un profil impair. Un élément  $\gamma$  de  $J_2(C)$  (groupe des points de 2-torsions de la jacobienne) définit un revêtement  $C_\gamma \rightarrow C$  non-ramifié de degré 2. On note  $\sigma$  l'involution de  $C_\gamma$  associée à ce revêtement. De plus, on note  $f_\gamma : C_\gamma \rightarrow X$  la composition de ce revêtement avec  $f$ . Ce morphisme définit une représentation de monodromie

$$(72) \quad M_{f_\gamma} : \pi(X^*) \rightarrow S(2d).$$

L'involution  $\sigma$  définit une involution dans  $S(2d)$  sans point fixe. Le morphisme de monodromie est à valeur dans  $B(d)$ , le *groupe hyper-octaédrique*, défini comme le centralisateur de  $\sigma$ . Une manière simple de représenter ce groupe est de noter  $D = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm d\}$  pour identifier  $S(2d)$  avec le groupe d'automorphisme de  $D$ . Dans cette notation on définit  $\sigma$  par  $\sigma(i) = -i$ . On a alors la représentation

$$(73) \quad B(d) \simeq S(d) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d.$$

Ce groupe admet une unique extension centrale non-triviale par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , le *groupe de Sergeev* :

$$(74) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow C(d) \rightarrow B(d) \rightarrow 0.$$

On a une description alternative de  $C(d)$  à partir du *groupe de Clifford*  $\text{Cliff}(d)$ . Celui-ci est défini comme le groupe engendré par des involutions  $\xi_1, \dots, \xi_d, \epsilon$ , où  $\epsilon$  est central on a les relations :

$$\xi_i \xi_j = \epsilon \xi_j \xi_i$$

pour  $i \neq j$ . On a alors l'isomorphisme  $C(d) \simeq S(d) \times \text{Cliff}(d)$ .

**4.2.3. Analogie spin de la formule de Burnside.** — Le groupe  $C(d)$  admet un plongement du groupe  $S(d)$ . On s'intéresse ici aux classes de conjugaison de  $C(d)$  engendrées par des permutations à profil de cycles  $\eta \in \mathcal{OP}(d)$ . Une telle classe de conjugaison est de cardinal :

$$(75) \quad |\mathbf{C}_\eta| = \frac{2^{d-\ell(\eta)} d!}{z_\eta}$$

où  $z_\eta = |\text{Aut}(\eta)| \prod \eta_i$  (voir [EOP08]). Par ailleurs, on considère la  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation sur  $C(d)$  donnée par  $\deg(\xi) = 1$  et  $\deg(\epsilon) = \deg(\sigma) = 0$  pour tout  $\sigma \in S(d)$ . Un *module spin* de  $C(d)$  est un super-module sur  $\mathbb{C}[C(d)]$  tel que  $\epsilon$  agisse non-trivialement. D'après les travaux originaux de Sergeev, les modules spins irréductibles sont indexés par les partitions strictes de  $d$  (voir [Sch11, Ser85]). On note  $\mathbf{dim} \lambda$  la dimension de la représentation irréductible  $V^\lambda$  associée à  $\lambda$ . Comme précédemment, pour une partition impaire  $\eta$  et un partition stricte  $\lambda$ , on note

$$(76) \quad \mathbf{f}_\eta^\lambda = \binom{|\lambda|}{|\eta|} |\mathbf{C}_\eta| \frac{\chi_\eta^\lambda}{\mathbf{dim} \lambda}.$$

où  $\chi_\eta^\lambda$  est le caractère d'un élément de  $\mathbf{C}_\eta$  sur  $V^\lambda$ . On a alors l'expression :

$$(77) \quad H_d^{X,L}(\eta_1, \dots, \eta_m) = \sqrt{2^{-d\chi(X) + \sum_i \ell(\mu_i) - d}} \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(d)} (-1)^{p(L)\ell(\lambda)} \left( \frac{\mathbf{dim} \lambda}{2^{\delta(\lambda)/2} d!} \right)^{\chi(X)} \times \prod_{i=1}^m \mathbf{f}_{\eta_i}^\lambda,$$



où  $\delta(\lambda) = 0$  si  $\ell(\lambda)$  est paire et 1 sinon (voir [EOP08]).

**4.2.4. Algèbre des fonctions super-symétriques.** — Si  $k$  est un entier positif impair, alors on note :

$$(78) \quad \mathbf{p}_k = -\frac{\zeta(-k)}{2} + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^k$$

(on a  $\zeta(-k) = (k+1)! \frac{2^{(k+1)/2}}{2^{k-1}} b_{k+1}$  avec les  $b_i$  définis par (67)). On définit l'algèbre des *fonctions super-symétriques* comme l'algèbre  $\Lambda = \mathbb{Q}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \dots]$ . Les fonctions  $\mathbf{f}_\eta$  définies à la section précédentes sont des fonctions super-symétriques et fournissent une base de  $\Lambda$  (voir [Iva01]). De même que pour l'algèbre des fonctions symétriques décalées, on a une fonction de poids sur  $\Lambda$  définie en posant que le poids de  $\mathbf{p}_k$  est égal à  $k+1$ . Si on pose

$$(79) \quad \mathbf{h}_k = \frac{-1}{k} [u^{k+1}] \mathbf{P}(z)^k, \quad \text{où } \mathbf{P}(z) = \exp\left(-\sum_{s \geq 1} u^{s+1} \mathbf{p}_s\right),$$

alors  $\mathbf{f}_k - \mathbf{h}_k/k$  est de poids au plus  $k$ .

### 4.3. $q$ -crochets et formes quasi-modulaires

Si la cible  $X$  est de genre 1 alors les nombres d'Hurwitz (spins) définissent des formes quasi-modulaires. On présente ce résultat ici car il sera utilisé au chapitre suivant pour calculer les volumes de strates de différentielles.

On rappelle la définition des séries d'Eisenstein pour  $k \geq 2$  pair :

$$(80) \quad E_k(q) = 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_n \sum_{d|n} d^{k-1} q^n \in \mathbb{Q}[[q]].$$

On définit l'algèbre des formes quasi-modulaires comme l'algèbre engendré par les séries d'Eisenstein. On rappelle que l'on a l'identification :

$$(81) \quad \text{QM}_* = \mathbb{Q}[E_2, E_4, E_6],$$

où le graduation de poids est donnée par  $w(E_k) = 2k$ . Par ailleurs, si  $f$  est une fonction sur l'ensemble des partitions (strictes), alors on définit le  $q$ -crochet (strict) de  $f$  comme

$$(82) \quad \langle f \rangle = \frac{1}{(q)_\infty^{-1}} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} f(\lambda) q^{|\lambda|},$$

$$(83) \quad \langle f \rangle_{\text{str}} = \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} f(\lambda) (-1)^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|},$$

où l'on pose

$$(84) \quad (q)_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) = \left( \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} \right)^{-1} = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} (-1)^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|}.$$

Si  $f$  est de la forme  $f_{\eta_1} \dots f_{\eta_n}$ , alors la formule de Burnside implique que le numérateur du  $q$ -crochet est le nombre de revêtements d'un tore avec profil donné par les  $\eta_i$  alors que le dénominateur compte les revêtements non ramifiés. Le  $q$ -crochet est donc défini comme la

série génératrice des revêtements possiblement non-connexes mais sans composantes non-ramifiées du tore. Le  $q$ -crochet strict fournit l'analogie avec parité de spin (où la structure spin sur le tore est la structure triviale).

**Théorème 4.3.1 ([BO00, EO01, EOP08]).** *Si  $f$  est une fonction symétrique décalée (respectivement super-symétrique) de poids  $k$ , alors  $\langle f \rangle$  (respectivement  $\langle f \rangle_{\text{str}}$ ) est une forme quasi-modulaire de poids  $k$ .*

Si  $f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions symétriques décalées alors on définit le  $q$ -crochet connexe comme :

$$(85) \quad \langle f_1 | f_2 | \dots | f_n \rangle = \sum_{\alpha \in \Pi(n)} (-1)^{\ell(\alpha)} \prod_{E \in \alpha} \left\langle \prod_{i \in E} f_i \right\rangle,$$

où  $\Pi(n)$  est l'ensemble des partitions de l'ensemble  $[1, n]$  en sous-ensembles non-triviaux. Le  $q$ -crochet connexe strict est défini de manière analogue. Le théorème ci-dessus permet de prouver que ces crochets définissent également des formes quasi-modulaires.

*Croissance des coefficients.* — On définit le morphisme d'algèbre  $\text{Ev} : \text{QM}_* \rightarrow \mathbb{Q}[X]$  par :

$$(86) \quad \text{Ev}(E_2) = X + 12, \quad \text{Ev}(E_4) = X^2 \quad \text{et} \quad \text{Ev}(E_6) = X^3.$$

**Proposition 4.3.2 ([EO01, CMZ18]).** *Soit  $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ , une forme quasi-modulaire de poids pur  $k$ . On suppose que  $\text{Ev}(f) = AX^k + O(X^{k-1})$ . On a alors le comportement asymptotique suivant :*

$$(87) \quad \sum_{n=0}^N a_n = A \frac{N^{2k}}{(2k)!} + O_{N \rightarrow \infty}(N^{2k-1} \log N).$$

Ce résultat permet d'évaluer efficacement le comportement asymptotique du nombre de revêtements du tore quand le degré tend vers l'infini.

*Revêtements avec poids de Siegel-Veech.* — On rappelle qu'un revêtement du tore est déterminé par son morphisme de monodromie, i.e. par un uplet  $(\alpha, \beta, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  d'éléments de  $S_d$  satisfaisant

$$(88) \quad \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} = \prod_{i=1}^n \sigma_i \dots \sigma_n,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les monodromies associées à des cycles formant une base symplectique de l'homologie du tore. Si  $k \in \mathbb{Z}$ , on définit le  $k$ -poids de Siegel-Veech d'un revêtement comme

$$(89) \quad S_k(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^k,$$

où les  $\alpha_i$  sont les longueurs des cycles de la permutation  $\alpha$ . Si on fixe un profil de ramification  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ , la constante de Siegel-Veech est donnée par :

$$(90) \quad c_k(d, \eta_1, \dots, \eta_n) = \sum_{[f: \mathbb{C} \rightarrow X]} \frac{S_k(f)}{|\text{Aut}(f)|}$$

où la somme porte sur les revêtements non-connexes sans composantes non-ramifiées. On note  $c_k^0$  l'analogue pour des revêtements connexes. Enfin, on note  $c_k^\pm$  et  $c_k^{0\pm}$  pour les constantes de Siegel-Veech signées. Pour des entiers impairs, ces constantes sont encore une fois calculées à partir du  $q$ -crochet sur les fonctions de partitions. Pour ce faire, on introduit les fonctions

$$(91) \quad T_k(\lambda) = \sum_{\square \in Y_\lambda} h(\square)^{k-1}, \quad \text{et} \quad T_k^\pm(\lambda) = \sum_i \lambda_i^k,$$

où la notation  $Y_\lambda$  désigne le tableau de Young associé à  $\lambda$  et  $h(\cdot)$  désigne la *longueur d'équerre* d'une case dans le tableau. Avec ces notations on a

$$(92) \quad c_k^0(d, \eta_1, \dots, \eta_m) = [q^d] \langle T_k | f_{\eta_1} | \dots | f_{\eta_m} \rangle$$

$$(93) \quad c_k^{\pm}(d, \eta_1, \dots, \eta_m) = [q^d] \langle T_k^\pm | f_{\eta_1} | \dots | f_{\eta_m} \rangle$$

Il est important de noter que le côté droit définit une forme quasi-modulaire pour  $k$  positif. Cependant le cas le plus important pour nous est donné pour  $k = -1$ . Dans ce cas le  $q$ -crochet n'est pas quasi-modulaire mais ce problème est résolu en considérant le *crochet modifié* (strict) de  $f$ , défini par :

$$(94) \quad \langle f \rangle^* = \langle T_{-1} f \rangle - \langle T_{-1} \rangle \langle f \rangle - \frac{1}{24} \langle \partial_2 f \rangle$$

$$(95) \quad \langle f \rangle_{\text{str}}^* = \langle p_{-1} f \rangle_{\text{str}} - \langle p_{-1} \rangle \langle f \rangle_{\text{str}} - \frac{1}{24} \langle \partial_2^\pm f \rangle_{\text{str}}$$

où l'on pose :

$$(96) \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \sum_{k \geq 2} k(k-1)p_{k-2} \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad \text{et} \quad \partial_2^\pm = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}.$$

**Théorème 4.3.3 ([EO01, CMZ18, 13]).** *Si  $f$  est de poids pur  $k$ , alors le crochet modifié (strict) de  $f$  est une forme quasi-modulaire de poids  $k$ . De plus, on a les résultats asymptotiques suivants :*

$$(97) \quad [q^d] \langle f \rangle^* \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{24} [q^d] \langle \partial_2 f \rangle, \quad \text{et} \quad [q^d] \langle f \rangle_{\text{str}}^* \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{24} [q^d] \langle \partial_2^\pm f \rangle_{\text{str}}.$$

Ces résultats seront utilisés au chapitre suivant pour évaluer les constantes de Siegel-Veech de strates de différentielles.



## CHAPITRE 5

### VOLUMES DE MASUR-VEECH ET CONSTANTES DE SIEGEL-VEECH

#### 5.1. Volumes et constantes de Siegel-Veech des surfaces de translation

Soient  $g, n \geq 0$  tels que  $2g - 2 + n > 0$  et  $\mu = (m_1, \dots, m_n)$  un vecteur d'entiers de  $\mathbb{N}^*$  satisfaisant  $|\mu| = 2g - 2 + n$ . On considère ici l'espace  $\mathcal{H}(\mu)$  de différentielles holomorphes sur des courbes de genre  $g$  et à zéros prescrits par  $\mu$ .

**5.1.1. Sous-variétés affines invariantes.** — L'espace  $\mathcal{H}(\mu)$  est muni d'une action naturelle de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Pour définir cette action, on utilise les cartes locales de  $\mathcal{H}(\mu)$  obtenues par la représentation des différentielles en surfaces de translations (voir section 2.2.2). Dans ces cartes l'action des matrices inversibles de taille 2 est donnée par l'action simultanée sur tous les vecteurs représentant les arêtes. Comme on l'a vu à l'avant-propos, si l'on se restreint au sous-groupe des matrices diagonales, alors cette action définit une structure de système dynamique sur  $\mathcal{H}(\mu)$ .

Les *sous-variétés affines invariantes* de  $\mathcal{H}(\mu)$  sont les adhérences des orbites de cette action. Un résultat fondamental dû à Eskin-Mirzakhani-Mohammadi fournit une description alternative de ces sous-espaces : une sous-variété affine invariante est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}(\mu)$  défini dans chacune des cartes locales de la section 2.2.2 comme des sous-espaces affines. Ces espaces sont des sous-champs algébriques de  $\mathcal{H}(\mu)$  définis sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  (voir [EMM15, Fil16]). Les familles suivantes sont des exemples importants de sous-variétés affines invariantes :

- Les composantes connexes des strates.
- Les espaces de modules de revêtements du tore avec des singularités prescrites (*espaces de surfaces à petits-carreaux*).
- Les espaces des modules de différentielles quadratiques plongés via le morphisme de revêtement canonique (mais pas les espaces de  $k$ -différentielles en général).

Le premier invariant associé aux variétés affines invariantes est le *volume de Masur-Veech* de leur projectivisation (voir section 2.2.4 pour la définition de cette mesure pour les strates et [Zor06] pour les espaces affines invariants généraux) que l'on note  $\text{Vol}(\mathcal{M})$ . On notera  $\text{Vol}(\mu)$  le volume de la strate totale et si  $\mu$  est un vecteur impair, on notera  $\text{Vol}(\mu)^\pm$  le volume de la composante paire moins le volume de la composante impaire.

**5.1.2. Constantes de Siegel-Veech.** — Soit  $(C, x_1, \dots, x_j, \eta)$  un point de  $\mathcal{H}(\mu)$  et  $L > 0$ . À l'avant-propos on a défini les fonctions de comptage  $\mathcal{N}_{i,j}(C, L)$  (nombre de périodes de liens de selles allant de  $x_i$  à  $x_j$  de longueurs plus petites que  $L$ ) et  $\mathcal{N}_i^{\text{cyl}}(C, L)$  (nombre de bords de cylindre de largeur plus petite que  $L$  contenant la singularité  $x_i$ ). À ces fonctions de comptage on ajoute :

$$(98) \quad \mathcal{N}_{\text{area}}(C, L) = \sum_{\mathcal{C} \text{ cylindre t.q. } w(\mathcal{C}) < L} \text{aire}(\mathcal{C}),$$

où  $w(\mathcal{C})$  est la largeur d'un cylindre. Soit  $\mathcal{M}$  un espace affine invariant connexe de  $\mathcal{H}(\mu)$ . Pour chacune de ces fonctions de comptage, il existe une constante  $c_*(\mathcal{M})$  (la *constante de Siegel-Veech*) satisfaisant : pour presque tout point de  $\mathcal{M}$ , on a

$$(99) \quad \mathcal{N}_*(C, L) = c_*(\mathcal{M}) \frac{L^2}{\text{area}(C)} + o(L^2).$$

D'après un résultat dû à Vorobets on a l'identité suivante :

$$(100) \quad c_{\text{area}}(\mathcal{M}) = \frac{1}{2(2g-2+n)} \sum_{i=1}^n c_i^{\text{cyl}}(\mathcal{M})$$

(voir [Vor05]). Si  $\mathcal{M}$  est une union d'espaces affines invariants connexes de même dimension, alors on note  $c_*(\mathcal{M})$  la moyenne des constantes de Siegel-Veech des composantes (pondérée par leur volume de Masur-Veech). On note  $c_*(\mu)$  la constante de Siegel-Veech de la strate et si  $\mu$  est impair on note  $c_*(\mu)^\pm$  la constante de Siegel-Veech pondérée par le signe spin.

**5.1.3. Calcul de volumes et constantes de Siegel-Veech des strates.** — Dans [EO01, EOP08, CMZ18, 2, 13] il a été montré que les constantes  $\text{Vol}(\mu)$ ,  $\text{Vol}(\mu)^\pm$ ,  $c_*(\mu)$  et  $c_*(\mu)^\pm$  sont calculables à partir soit :

1. de fonctions symétriques décalées / super-symétriques et de leurs  $q$ -crochets ;
2. ou de la théorie de l'intersection de  $\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}(\mu)$ .

Ces deux types de résultats ont permis de décrire précisément la structure combinatoire de ces constantes.

*Expressions à partir des formes quasi-modulaires.* — Fixons un tore  $\mathbb{T}$  muni d'une structure complexe et d'une différentielle holomorphe d'aire  $1/d$ . Un revêtement de degré  $d$  (connexe) de ce tore avec profil de ramification donné par  $\mu$  donne lieu à une différentielle holomorphe de  $\mathcal{H}(\mu)$  d'aire 1. L'ensemble des points de  $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$  définis par de tels revêtements s'équidistribuent quand  $d$  tend vers l'infini. Ce fait se traduit par le résultat asymptotique suivant

$$(101) \quad \text{Vol}(\mu) = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D^{\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(\mu)}} \sum_{d=1}^D H_d^{\mathbb{T}}((\mu_1), (\mu_2), \dots, (\mu_n)),$$

(voir [EO01]). Si l'on s'intéresse aux constantes Siegel-Veech, alors

$$(102) \quad c_{\text{area}}(\mu) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{3}{\pi^2} \frac{c_{-1}^0(d, (\mu_1), \dots, (\mu_n))}{H_d^{\mathbb{T}}((\mu_1), (\mu_2), \dots, (\mu_n))}$$

(voir [CMZ18]). Par ailleurs, des résultats analogues pour les comptages pondérés par la parité sont également valides. Ces expressions des volumes et constantes de Siegel-Veech comme limite de nombres d’Hurwitz donnent lieu à une procédure explicite pour calculer ces constantes basée sur les résultats de la section 4.3 :

1. Les nombres d’Hurwitz du tore sont exprimés à partir de  $q$ -crochets de fonctions  $f_k$ .
2. On peut remplacer les fonctions  $f_k$  par les fonctions  $h_k$  qui sont de poids pur et simplement exprimables à partir des fonctions  $p_k$ .
3. Le  $q$ -crochet pour les fonctions  $p_k$  est explicite et fournit une description de la partie de plus haut poids du  $q$ -crochet des fonctions  $f_k$ .
4. La proposition 4.3.2 fournit le comportement asymptotique de formes quasi-modulaires d’un poids donné.

En s’appuyant sur cette stratégie il est possible de calculer les constantes de  $\mathcal{H}(\mu)$  de la manière suivante. On rappelle qu’on a les identifications  $\Lambda^* = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \dots]$  (voir section 4.1). Pour tout sous-ensemble fini non trivial  $I \subset \mathbb{N}$  on définit une série formelle  $\mathcal{A}_I$  dans  $\Lambda^*[[\{z_i\}_{i \in I}]]$  inductivement :

$$(103) \quad \mathcal{A}_{\{i\}} = \frac{1}{z_i} + \sum_{s \geq 1} h_s z_i^s,$$

$$(104) \quad \mathcal{A}_{\{i,j\}} = \frac{z_i \mathcal{A}'(z_i) - z_j \mathcal{A}'(z_j)}{\mathcal{A}(z_j) - \mathcal{A}(z_i)},$$

$$(105) \quad \mathcal{A}_I = \frac{1}{|I|-1} \sum_{k \geq 1} \sum_{I = \{r,s\} \sqcup I_s \sqcup \dots \sqcup I_k} \frac{1}{k!} \mathcal{A}_{r,s}^\ell \prod_{i=1}^k \mathcal{A}_{I_i}^{[\ell_i]}, \text{ pour } n \geq 3.$$

À la dernière ligne, la seconde somme porte sur toutes les partitions en  $k+1$  ensembles non-triviaux et on note :

$$\mathcal{A}_{r,s}^\ell = \frac{\partial^k}{\partial h_{\ell_1} \dots \partial h_{\ell_k}} \mathcal{A}_{r,s}, \text{ et } \mathcal{A}_I^{[\ell]} = [z_x^\ell] \mathcal{A}_{I \sqcup \{x\}}$$

(pour une valeur de  $x$  quelconque n’appartenant pas à  $I$ ). Les séries  $\mathcal{A}_I \in \Lambda^*[[\{z_i\}_{i \in I}]]$  sont définies par les mêmes formules. On définit alors les morphismes d’anneaux suivants  $\alpha : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{Q}$  et  $\alpha : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{Q}$  par les formules

$$[z^n] \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \alpha(h_k) z^{k+1} \right)^n = n! [z^n] \mathcal{S}(z), \text{ et } [z^n] \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \alpha(\mathbf{h}_k) z^{k+1} \right)^n = n! \frac{-2^{n/2-1}}{2^{n-1}-1} [z^n] \mathcal{S}(z),$$

pour  $n \geq 1$ . Les définitions (103)-(105), en apparence ad hoc, traduisent la structure combinatoire du calcul des volumes grâce aux formes quasi-modulaires. La première série contient les volume pour  $n = 1$  (strates minimales) et la seconde fournit une “règle” pour remplacer deux entrées par des coefficients définis par des volumes de strates minimales. Enfin, la troisième ligne permet d’appliquer cette règles de collision de deux entrées dans le cas où le profil  $\mu$  est de longueur arbitraire. Le résultat peut être représenté par un arbre où chaque sommet représente l’une de ces “collisions”.

**Théorème 5.1.1** ([2, 9, 13]). *Pour tout  $\mu$  on a les égalités suivantes :*

$$(106) \quad \text{Vol}(\mu) = \frac{(2i\pi)^{2g}}{(2g-1+n)!} \alpha([z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}] \mathcal{A}_{[[1,n]]})$$

$$(107) \quad \text{et } c_{\text{area}}(\mu) = \frac{-1}{8\pi^2} \frac{\alpha([z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}] \partial_2 \mathcal{A}_{[[1,n]]})}{\alpha([z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}] \mathcal{A}_{[[1,n]]})},$$

*et si  $\mu$  est impair, alors on a*

$$(108) \quad \text{Vol}(\mu)^\pm = \frac{(2i\pi)^{2g}}{(2g-1+n)!} \alpha([z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}] \mathcal{A}_{[[1,n]]}^\pm)$$

$$(109) \quad \text{et } c_{\text{area}}(\mu)^\pm = \frac{-2^{g-1}}{8\pi^2} \frac{\alpha([z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}] \partial_2^\pm \mathcal{A}_{[[1,n]]}^\pm)}{\alpha([z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}] \mathcal{A}_{[[1,n]]}^\pm)}$$

(voir (96) pour la définition des opérateurs  $\partial_2$  et  $\partial_2^\pm$ ).

*Expression à partir de la théorie de l'intersection.* — Pour tout  $i \in [[1, n]]$ , on introduit les classes de cohomologie suivantes :

$$(110) \quad \beta_i = \frac{1}{m_i} \xi^{2g-2} \prod_{j \neq i} \psi_j \in H^{2(2g-3+n)}(\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}_{g,n}, \mathbb{Q}).$$

Ces formes satisfont les identités suivantes : si  $\alpha \in H^2(\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ , alors on a l'égalité :

$$(111) \quad \int_{\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}(\mu)} \beta_i \alpha = \int_{\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}(\mu)} \beta_j \alpha,$$

pour tous les choix de  $i, j$  dans  $[[1, n]]$  (voir [2]). Ce résultat reste vrai si l'on remplace  $\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}(\mu)$  par une composante connexe. En s'appuyant sur cet indépendance on a montré les résultats suivants :

**Théorème 5.1.2** ([2, 9, 13]). *Pour toute composante connexe  $Y$  de  $\mathcal{H}(\mu)$  et pour tout valeur de  $i \in [[1, n]]$ , on a les égalités suivantes*

$$(112) \quad \text{Vol}(Y) = \frac{(2i\pi)^{2g} |\mu|}{(|\mu| + 1)!} \int_{\mathbb{P}\overline{Y}} \beta_i \wedge \xi$$

$$(113) \quad \text{et } c_{\text{area}}(Y) = \frac{-1}{4\pi^2} \frac{\int_{\mathbb{P}\overline{Y}} \beta_i \wedge \delta_0}{\int_{\mathbb{P}\overline{Y}} \beta_i \wedge \xi}$$

(où  $\delta_0$  est la classe du lieu des courbes avec un nœud séparant).

Notons que la preuve de la formule (112) s'appuie sur le théorème 5.1.1 établi à partir de la théorie des formes quasi-modulaires. En effet, cette formule est établie en montrant que les nombres d'intersections satisfont des récurrences équivalentes à celles fournies par les formules (106) et (108). En revanche, les expressions des constantes de Siegel-Veech (113) peuvent être démontrées sans utiliser les expressions (107) et (109) (cependant la preuve utilise les expressions des volumes et donc ne peuvent pas être obtenues indépendamment du théorème 5.1.1 non plus).

La preuve des résultats présentés à l'avant-propos s'appuie essentiellement sur le résultat d'indépendance (111). Par exemple l'égalité  $\frac{c_i(\mu)}{c_j(\mu)} = \frac{m_i}{m_j}$  découle de cette indépendance et de



l'identification :

$$(114) \quad c_i(Y) = \frac{-m_i \int_{\mathbb{P}\bar{Y}} \beta_i \wedge \delta_0}{4\pi^2 \int_{\mathbb{P}\bar{Y}} \beta_i \wedge \xi}$$

(voir [13]).

## 5.2. Généralisations aux espaces de différentielles supérieures

**5.2.1. Volume des strates de  $k$ -différentielles.** — Soit  $k$  un entier strictement supérieur à 1 et  $\mu$  une partition de  $k(2g-2+n)$ . On s'intéresse ici au volume  $\text{Vol}_g(\mu)$  des espaces de  $k$ -différentielles avec singularités prescrites par  $\mu$ . Dans [1, 11, CMZ19] le résultat suivant est établi.

**Proposition 5.2.1.** *Pour tout vecteur de  $\mu$  sans entrée divisible par  $k$ , on a*

$$(115) \quad \text{Vol}_g(\mu) = \frac{4(2\pi)^\chi (-1)^{g-1+n}}{k^{\chi-1} \chi! \left( \prod_{j=1}^n 2 \sin\left(\frac{\mu_j}{k} \pi\right) \right)} \int_{\mathbb{P}\bar{\Omega}_g(\mu)} \xi^{\chi-1},$$

où  $\chi = 2g-2+n$ .

La preuve de ce résultat repose sur la représentation de la forme de Veech comme la puissance maximale de la métrique duale de la métrique hermitienne d'aire sur  $\mathcal{O}(-1)$ . Dans [CMZ19] les auteurs ont montré que le courant associé représente bien la classe de cohomologie  $\xi^{2g-3+n}$  sur la compactification lisse des strates, l'espace des différentielles à multi-niveaux  $\Xi_g(\mu)$  mentionné au chapitre 2. Ce résultat a la conséquence importante suivante.

**Théorème 5.2.2 ([11]).** *Pour tout  $\mu$  sans entrée divisible par  $k$ , le volume  $\text{Vol}_g(\mu)$  est explicitement calculable.*

A la différence des volumes de strates de différentielles holomorphes présentés à la section précédente, ce résultat provient d'un énoncé géométrique et non d'un contournement du problème via la combinatoire.

Dans le cas où  $\mu$  a des entrées divisibles par  $k$ , alors le nombre d'intersection à droite de la formule 115 est nul. On conjecture que ce nombre d'intersection doit être modifié en utilisant des classes  $\psi$ .

**Conjecture 5.2.3.** *Pour tout  $\mu$  on a l'égalité :*

$$(116) \quad \text{Vol}_g(\mu) = \frac{4(2\pi)^\chi (-1)^{g-1+n}}{k^{\chi-1} \chi!} \int_{\mathbb{P}\bar{\Omega}_g(\mu)} \xi^{2g-3} \prod_{j \text{ t.q. } a_j \notin k\mathbb{N}^*} \frac{\xi}{2 \sin\left(\frac{\mu_j}{k} \pi\right)} \prod_{j \text{ t.q. } a_j \in k\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{a_j/k} k \psi_j}{2\pi}.$$

**5.2.2. Volumes des espaces de surface plates.** — Soit  $a$  un vecteur de  $\partial\Delta_{g,n}$ . On a vu à la section 2.2.4 que l'espace  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  est muni d'une forme volume définie localement comme le produit extérieur d'une forme le long du feuilletage isopériodique et de la mesure de Haar sur le tore d'holonomie. On note  $\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}(a)$  le volume total de l'espace pour cette forme volume. Si  $a$  est rationnel, ce volume peut être calculé comme une limite de volume

d'espaces de  $k$ -différentielles :

$$\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{2g}} \text{Vol}_g(ka)$$

où la limite porte sur les valeurs de  $k$  telles que le vecteur  $ka$  soit entier. Ce résultat asymptotique traduit l'approximation de la mesure de Haar sur le tore réel par les mesures de comptages des points de  $k$ -torsion. En utilisant ce résultat et le théorème 5.2.2 j'ai pu montrer :

**Théorème 5.2.4.** *Pour tout vecteur  $a$  rationnel sans entrée entière, le volume  $\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}(a)$  est fini et explicitement calculable.*

La fonction  $\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}$  calculée aux points rationnels (sans entrées entières) s'étend en une fonction continue  $\widetilde{\text{Vol}}_{g,n}^{\text{flat}}$  sur  $\partial\Delta_{g,n}$ . On conjecture que la fonction  $\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}$  est continue et cela impliquerait immédiatement l'égalité :  $\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}(a) = \widetilde{\text{Vol}}_{g,n}^{\text{flat}}(a)$  pour toute valeur de  $a$  dans  $\partial\Delta_{g,n}$ . Cette continuité n'est prouvée qu'en genre 0 avec des valeurs de  $a_i$  plus petites que 1 par un calcul direct de  $\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}(a)$  pour toute valeur de  $a$  (voir [McM17] et [KN18]).

*Récursion plate.* — Pour calculer les fonctions  $\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}$  on commence par étudier la fonction

$$\begin{aligned} \nu : \partial\Delta_{g,n} \cap \mathbb{Q}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{4g-3+n}} \int_{\mathbb{P}\overline{\Omega}_g(ka)} \xi^{2g-3+n}. \end{aligned}$$

Cette fonction s'étend continument à  $\partial\Delta_{g,n}$  en une fonction polynômiale par morceaux (de degré au plus  $4g-3+n$ ). Celle-ci est calculable explicitement par récurrence sur  $g$  et  $n$ , en prenant pour base de récurrence  $\nu(\partial\Delta_{0,3}) = 1$ .

Pour décrire la formule de récurrence, fixons une paire  $(g,n) \neq (0,3)$ . On note  $\text{St}_{g,n}$  l'ensemble des *graphes étoilés*, i.e. les graphes stables  $\Gamma$  satisfaisant : si l'on dénote  $v_0$  le sommet portant la patte d'indice 1, alors tout arête de  $\Gamma$  connecte  $v_0$  et un sommet différent de  $v_0$ . Une *fonction de poids* sur un tel graphe est la donnée de  $w : H(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant :

1. Si  $(h, h')$  est une arête, alors  $w(h) + w(h') = 0$ .
2. Si  $h$  est incidente à un sommet différent de  $v_0$ , alors  $w(h) > 0$ .
3. Pour tout sommet  $v$  on note  $w(v) = (w(h))_{h \rightarrow v}$  le vecteur réel des  $w(h)$  pour  $h$  incidents à  $v$ . On impose alors  $|w(v)| = 2g(v) - 2 + n(v)$ .

Si  $a \in \partial\Delta_{g,n}$  est un vecteur fixé, on note  $\Delta_\Gamma(a)$  l'ensemble des fonctions de poids compatibles avec  $a$  (i.e. telle que  $w(i) = a_i$ ). Cet ensemble est un simplexe de dimension au plus  $h^1(\Gamma)$  (voir figure 8 pour un exemple).

On définit la contribution du graphe  $\Gamma$  comme une intégrale sur ce simplexe :

$$(117) \quad \text{Cont}_\Gamma(a) = \int_{w \in \Delta_\Gamma(a)} \widetilde{\mathcal{A}}_{g(v_0)}(w(v_0)) \left( \prod_{v \neq v_0} \nu(w(v)) \right) \left( \prod_{e=(h,h') \in E(\Gamma)} |w(h)| \right),$$

où on utilise les polynômes suivants :

$$\widetilde{\mathcal{A}}_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

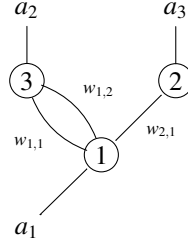


FIGURE 8. Graphe étoilé dans  $\text{St}_{7,3}$ . Le domaine  $\Delta_{\Gamma}(a)$  est défini comme l'ensemble des nombres positifs  $w_{1,1}, w_{1,2}$  et  $w_{2,1}$  (valeurs de la fonction de poids aux demi-arêtes incidentes aux sommets non-centrales) satisfaisant les contraintes  $w_{2,1} = 4 - a_3$  et  $w_{1,1} + w_{1,2} = 7 - a_2$ . Ce simplexe est de dimension 1 ou vide si  $a_2 \geq 7$  ou  $a_3 \geq 4$ .

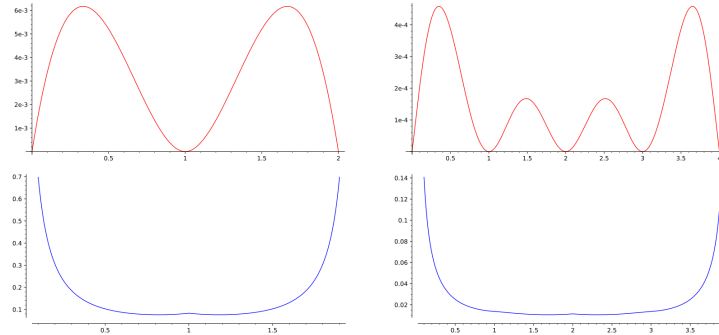


FIGURE 9. Graphes des fonctions  $a_1 \mapsto (-1)^g a(a_1, 2g - a_1)$  (en haut), et  $a_1 \mapsto \text{Vol}^b(a_1, 2g - a_1)$  (en bas), pour  $g = 1$  (à gauche), et  $g = 2$  (à droite). On observe notamment la continuité de la fonction  $\text{Vol}^b$  aux valeurs entières.

$$(118) \quad a \mapsto (-a_1)^{2g-3+n} [z^{2g}] \exp\left(a_1 z \frac{S'(z)}{S(z)}\right) \frac{\prod_{i=2}^n S(a_i z)}{S(z)^{2g-1+n}}.$$

Avec ces notations, la fonction  $\nu$  est définie par la formule de *récurrence plate* :

$$(119) \quad \nu(a) = \sum_{\Gamma \in \text{St}_{g,n}} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \text{Cont}_{\Gamma}(a).$$

*Une étrange récursion topologique.* — Le récursion topologique est un formalisme développé par Chekhov-Eynard-Orantin qui permet de décrire récursivement les solutions de nombreux problèmes de géométrie énumérative [Eyn14]. Le récursion plate ne tombe pas dans ce formalisme car l'ensemble des graphes étoilés est plus large que l'ensemble des graphes utiliser pour faire fonctionner les formules d'induction de la récursion topologique. En revanche lorsque  $a$  possède une entrée entière ( $a_1$  par exemple), alors un phénomène surprenant se produit car la formule de récursion plate peut être simplifiée pour retrouver une version de récursion topologique.

**Theorem 5.2.5.** *Si  $N$  est un entier strictement positif, alors*

$$N \frac{\partial \nu}{\partial a_1} \Big|_{a_1=N} = \sum_{i=2}^n (a_i + N - 1) \nu(a_2, \dots, a_i + N - 1, \dots)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{b=0}^{N-1} (N-1-b)b \nu(b, N-1-b, a_2, \dots) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I_1 \sqcup I_2 = \{2, \dots, n\}}} b_1 b_2 \nu(b_1, \{a_i\}_{i \in I_1}) \nu(b_2, \{a_i\}_{i \in I_2}),
\end{aligned}$$

où  $b_j = 2g_j - 2 - \sum_{i \in I_j} (a_i - 1)$  si  $j = 1$  ou  $2$  dans la dernière somme.

Les énoncés de récursion topologique reflètent en principe la relation naturelle entre un problème de géométrie énumérative et le bord des espaces des modules de courbes. Le théorème 5.2.5 est prouvé à partir d'un argument combinatoire ad-hoc. La seule propriété géométrique utilisée est l'annulation de la fonction  $\nu$  aux valeurs entières traduisant l'existence de déformations isopériodiques. L'absence d'un argument géométrique directe permettant d'expliquer le comportement exceptionnel de la fonction  $\nu$  aux vecteurs munis d'une entrée entière, peut-être vue comme le reflet du caractère transcendant des feuilletages isopériodiques.

Notons par ailleurs que, si l'on suppose que la fonction  $\nu$  est continue alors le théorème 5.2.5 démontre que la conjecture 5.2.3 est valide après passage à la limite quand  $k$  tend vers l'infini. Il s'agit de la première validation de cette conjecture.

### 5.3. Comportements en grand genre

Une grande attention a été portée récemment aux comportements asymptotiques pour de grandes valeurs de  $g$  des volumes d'espaces de surfaces plates. De tels résultats / conjectures sont motivés notamment par l'étude des surfaces aléatoires de grand genre en géométrie hyperbolique (voir [Mir13, MP19] par exemple).

*Cas des différentielles abéliennes.* — Si  $k = 1$ , une description du comportement asymptotique des volumes et constantes de Siegel-Veech avait été conjecturée par Eskin et Zorich.

**Conjecture 5.3.1 ([EZ15]).** *Il existe des constantes positives  $C, C_0, C^\pm, C_0^\pm$  telles que pour tout  $\mu$  on a*

$$(120) \quad \left| |\mu| \prod_{i=1}^n m_i \text{Vol}(\mu) - 2 \right| < \frac{C}{g}, \quad \left| c_{\text{area}}(\mu) - \frac{1}{2} \right| < \frac{C_0}{g},$$

$$(121) \quad |\text{Vol}(\mu)^\pm| < \frac{C^\pm}{g} \text{Vol}(\mu), \quad |c_{\text{area}}(\mu)^\pm| < \frac{C_0^\pm}{g} c_{\text{area}}(\mu).$$

La première partie de cette conjecture (ligne (120)) a été résolue en toute généralité par Aggarwal dans [Agg20, Agg19]. En utilisant le théorème 5.1.1 nous avons donné dans [2] une preuve simplifiée de ce résultat en utilisant la structure combinatoire explicite des volumes et constantes de Siegel-Veech. De plus, ce théorème fournit une description des constantes pondérées par la parité de spin, ce qui nous a permis de prouver la seconde partie de la conjecture 5.3.1. Par ailleurs, j'ai affiné ce résultat en montrant qu'il existe un développement asymptotique en tout ordre

**Théorème 5.3.2 ([12]).** *Il existe une famille de constantes  $(c_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$  dans  $\mathbb{Q}[\pi^2]$  telles que pour tout  $r \geq 0$  on a*

$$(122) \quad |\mu| \left( \prod_{i=1}^n m_i \right) \text{Vol}(\mu) = \sum_{k+\ell \leq r} \frac{c_{k,\ell}}{g^k |\mu|^\ell} + O_r(g^{-(r+1)})$$

où  $|\mu|_\ell = (|\mu|-1)(|\mu|-2)\dots(|\mu|-\ell)$  et la notation  $O_k(g^{-r})$  signifie : une fonction bornée par  $Cg^{-r}$  (avec  $C$  une constante positive) pour toute valeur de  $\mu$  avec des entrées plus grande que  $k$ .

*Cas des différentielles quadratiques.* — Dans le cas des différentielles quadratiques une conjecture générale similaire à (120) a été proposée dans [ADG<sup>+</sup>20]. Cependant, nous allons nous concentrer sur le cas des *strates principales*, i.e. les strates de la forme

$$\mathcal{Q}_{g,n} = \Omega_g(1^n, 3^{4g-4+n}).$$

Pour ces strates nous avons montré dans [1] l'expression suivante :

$$(123) \quad \text{Vol}(\mathcal{Q}_{g,n}) = \frac{2^n (\pi/2)^{6g-6+2n} (2g-3+n)! (4g-4+n)!}{(6g-6+2n)!} P_g(n),$$

où

$$(124) \quad P_g(n) = \sum_{i=0}^g \frac{(4g-7+2n+i)!!}{(4g-6+2n)!!} \frac{1}{(2g-3+i)! (4g-7+i)!!} \int_{\mathcal{M}_{g,2g-3+i}} \psi_1^2 \dots \psi_{2g-3+i}^2 \lambda_{g-i}.$$

La fonction  $P_g$  n'est pas un polynôme mais elle se décompose comme

$$(125) \quad P_g(n) = P_g^1(n) + \gamma(2g-3+n)P_g^0(n)$$

où  $\gamma(k) = \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}$  et les  $P_g^i$  sont des polynômes. Cette structure des volumes de Masur-Veech pour une valeur de  $g$  fixée avait été conjecturée des [ABC<sup>+</sup>23] : les auteurs avaient calculé ces volumes à partir du formalisme de récurrence topologique (voir [Eyn14]). Le résultat de leur étude est une expression des volumes des strates principales très différente de l'équation (124) et n'impliquant que des classes  $\psi$ . L'équivalence entre ces deux formules est montré dans l'appendice de [1].

Les nombres d'intersection définissant les polynômes  $P_g^i$  satisfont des formules de récurrence simples prouvées par Kazarian (voir [Kaz22]). En utilisant cette expression simplifiée des volumes des strates principales, Aggarwal a pu montrer le résultat asymptotique suivant :

$$(126) \quad \text{Vol}(\mathcal{Q}_{g,0}) \underset{g \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3\pi g} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{4g-4}$$

(voir [Agg21]). De plus on a montré dans [1] que les constantes de Siegel-Veech d'aire des strates principales s'expriment en fonction de nombres d'intersection. Ceci a également permis à Aggarwal de montrer le résultat asymptotique suivant

$$(127) \quad c_{\text{area}}(\mathcal{Q}_{g,0}) \underset{g \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4}.$$

Ces résultats asymptotiques ont de nombreuses implications pour différents types de comptages de courbes fermées simples sur les surfaces de demi-translation mais également pour

les surfaces hyperboliques grâce au principe de transfert combinatoire des surfaces à petits-carreaux (voir [DGZZ21, DGZZ22]).

*Cas des surfaces plates.* — D'après des observations numériques on conjecture qu'il existe une famille de constantes  $c_{g,n} \in \mathbb{R}_{>0}$  telle que pour tout  $n \geq 2$  on ait le comportement asymptotique suivant pour les volumes de surfaces plates :

$$(128) \quad \text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}(a) \underset{g \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c_{g,n}}{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

Bien que la récursion plate (119) soit explicite, il semble difficile à ce jour de décrire le comportement asymptotique de  $\text{Vol}_{g,n}^{\text{flat}}$  car les contributions des graphes étoilés portent des signes différents.

## CHAPITRE 6

### COMPTAGES D'APPLICATIONS VERS DES COURBES SPINS

Je présente ici les résultats obtenus avec Giacchetto-Kramer-Lewanski sur la théorie de Gromov-Witten spin de  $\mathbb{P}^1$  (voir [5]).

#### 6.1. Théorie de Gromov-Witten spin

**6.1.1. Invariants de Gromov-Witten.** — Soit  $X$  une variété quasi-projective lisse et  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ . On fixe  $g$  et  $n$  des entiers non-négatifs. L'espace des applications stables  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  est l'espace des modules d'objets :

$$(C, x_1, \dots, x_n, f : C \rightarrow X), \text{ où :}$$

- $C$  est une courbe semi-stable (non nécessairement connexe) de genre  $g$  ;
- les  $x_i$  sont des points lisses distincts de  $C$  ;
- $f : C \rightarrow X$  est une application satisfaisant  $f_*[C] = \beta$  ;
- Les automorphismes de  $C$  préservant les points marqués et  $f$  sont en nombre fini.

L'espace  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  est un champ de Deligne-Mumford. Cet espace est muni d'une courbe universelle  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  avec des sections  $\sigma_i$  et une application universelle  $f : \mathcal{C} \rightarrow X$ . De plus, pour tout  $1 \leq i \leq n$  on note  $ev_i = f \circ \sigma_i$  l'application d'évaluation.

L'espace  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  n'est pas lisse en général et peut posséder des composantes de différentes dimensions. Cependant, on peut définir la dimension virtuelle de cette espace comme :

$$(129) \quad \text{vdim} = (\dim(X) - 3)(1 - g) + n + \int_{\beta} c_1(X).$$

Toutes les composantes de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  ont une dimension supérieure ou égale à  $\text{vdim}$ . De plus, Behrend et Fantechi ont construit un cycle virtuel fondamental

$$(130) \quad [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\text{vir}} \in H_{2\text{vdim}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta), \mathbb{Q})$$

(voir [BF97]). Ce cycle "joue le rôle" de la classe fondamentale dans la définition d'invariants numériques de  $X$ . Plus précisément les *invariants de Gromov-Witten* (GW)

sont définis comme :

$$(131) \quad \langle \tau_{k_1}(\gamma_1) \dots \tau_{k_n}(\gamma_n) \rangle_{g,n}^{X,\beta} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\text{vir}}} \prod_{i=1}^n \psi_i^{k_i} \text{ev}_i^*(\gamma_i),$$

où les  $k_i$  sont des entiers positifs ou nuls et les  $\gamma_i$  sont des classes de cohomologie de  $H^*(X, \mathbb{Q})$ .

Ces invariants sont calculables en principe pour une large classe de variétés (voir [MP06, ABPZ23]). Cependant, il existe peu de variétés pour lesquelles une description “simple” des invariants de GW est connue en tout genre. Les cas où une telle description simple existe sont : le point (par le théorème de Kontsevich-Witten, voir chapitre 7), les courbes (grâce aux travaux d'Okounkov-Pandharipande [OP06b, OP06a, OP06c]) et certaines classes de variété de Calabi-Yau toriques ou locales (voir [BP08, PP17]).

**6.1.2. Surfaces avec un diviseur canonique.** — On suppose ici que  $S$  est une surface complexe et que celle-ci admet une 2-forme holomorphe. Pour simplifier l'exposé, on suppose ici que cette 2-forme s'annule simplement le long d'un diviseur lisse et connexe  $X$ . On note  $L$  le fibré normal à  $X$  dans  $S$ . Remarquons que ce fibré est une structure spin sur  $X$ . En effet la formule d'adjonction permet d'écrire

$$(132) \quad \omega_X \simeq \omega_{S|X} \otimes L \simeq L \otimes L.$$

Si on choisit  $\beta = d[X]$ , alors on a un plongement:

$$(133) \quad \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d) \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(S, d[X])$$

(pour les courbes on note simplement  $d$  pour signifier les multiples de la classe fondamentale). En utilisant le formalisme de localisation par co-section, Kiem et Li ont montré le résultat suivant.

**Théorème 6.1.1 ([KL11a]).** *Si  $S$  satisfait les hypothèses ci-dessus et si  $\beta$  n'est pas un multiple de  $\omega_S$  alors les invariants de GW associés s'annulent. Si au contraire, on suppose que  $\beta = d[X]$ , alors il existe un cycle*

$$[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d)]^{\text{loc},L} \in H_{2\text{vdim}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d), \mathbb{Q})$$

(où  $\text{vdim}$  est la dimension virtuelle de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(S, d[X])$ ) satisfaisant :

$$\langle \tau_{k_1}(\gamma_1) \dots \tau_{k_n}(\gamma_n) \rangle_{g,n}^{S,\beta} = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,d)]^{\text{loc},L}} \prod_{i=1}^n \psi_i^{k_i} \text{ev}_i^*(\gamma_i|_X)$$

pour tout choix de  $\gamma_i$  et  $k_i$ .

Kiem et Li ont également montré que le cycle  $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d)]^{\text{loc},L}$  ne dépend que de  $L \rightarrow X$  (i.e. celui-ci est indépendant de la géométrie globale de  $S$ ) et que les invariants associés sont constants lorsque l'on déforme la structure complexe. Ces invariants sont appelés *invariants de GW spins* de la paire  $(X, L)$  et ne dépendent que du genre de  $X$  et de l'invariant de Arf de  $L$  (les invariants topologiques).



## 6.2. Correspondance GW/Hurwitz spin

Les *invariants stationnaires* sont les invariants de la forme  $\langle \tau_{k_1}(\omega) \dots \tau_{k_n}(\omega) \rangle_{g,n}^{S,\beta}$  où  $\omega$  est la classe Poincaré-duale du point. Dans [Lee20], Junho Lee a conjecturé que ces invariants s'exprimaient à partir des nombres d'Hurwitz spins au travers de la correspondance de Gromov-Witten spin. Cette relation conjecturale est le pendant de la correspondance GW/Hurwitz d'Okounkov-Pandharipande permettant d'exprimer les invariants de GW stationnaires des courbes en fonction des nombres d'Hurwitz classiques.

**Conjecture 6.2.1 ([KL11a]).** *Les invariants de GW spins stationnaires sont exprimés à partir de la fonction d'Hurwitz spin :*

$$(134) \quad \langle \tau_{k_1}(\omega) \dots \tau_{k_n}(\omega) \rangle_{g,n}^{S,\beta} = H_d^{X,L} \left( \frac{(-1)^{k_1} k_1!}{2^{k_1} (2k_1 - 1)!} \mathbf{p}^{2k_1-1}, \dots, \frac{(-1)^{k_n} k_n!}{2^{k_n} (2k_n - 1)!} \mathbf{p}^{2k_n+1} \right).$$

La notation utilisée pour énoncer cette conjecture signifie : si l'on exprime les fonctions  $\mathbf{p}_k$  dans la base des fonctions  $\mathbf{f}_\mu$  de  $\Lambda^*$  alors on peut associer à  $\mathbf{p}_k$  une combinaison linéaire formelle de partitions. En étendant linéairement la définition de la fonction  $H_d^{X,L}$ , on peut exprimer les nombres d'Hurwitz spins associés à de telles combinaison formelles. Cette combinaison linéaire est explicite :

$$(135) \quad \mathbf{p}_{2k+1} = \sum_{\mu \in \mathcal{OP}} \left[ z^{2k+2-|\mu|-\ell(\mu)} \frac{(2k)!}{2^{|\mu|} |\mu|!} \mathcal{S}(2z) \mathcal{S}(z)^{|\mu|-2} \left( \prod_{\mu_i \in \mu} 2\mu_i \mathcal{S}(\mu_i z) \right) \right] \mathbf{f}_\mu.$$

Cette conjecture a été établie pour des cibles quelconques lorsque  $d = 1$  ou  $2$  ou lorsque  $\text{vdim} = 0$  par Kiem et Li (voir [KL13, KL11a, KL11b]). Avec Giacchetto-Kramer-Lewanski, nous avons établi le cas des cibles de genre 0.

**Théorème 6.2.2 ([5]).** *La conjecture 6.2.1 est valide si  $(X, L) = (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1))$ .*

La preuve de ce théorème repose sur trois points essentiels :

1. Dans le cas où  $(X, L) = (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1))$ , le cycle virtuel localisé s'exprime simplement à partir du cycle virtuel usuel de la manière suivante :

$$(136) \quad [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^1, d)]^{\text{loc}, \mathcal{O}(-1)} = c_{g+d-1} (\mathcal{R}^1 \pi_* f^* \mathcal{O}(-1)) [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^1, d)]^{\text{vir}},$$

où  $\pi$  est le morphisme définissant la courbe universelle et  $f$  est le morphisme universel vers  $X$ .

2. En utilisant l'action de  $\mathbb{C}^*$  et la formule de localisation virtuelle établie par Graber-Pandharipande (voir [GP99]), on peut exprimer les intégrales le long du cycle localisé comme des intégrales sur les espaces des modules de courbes.
3. Les intégrales apparaissant dans la formule de localisation virtuelle sont des intégrales de Hodge doubles. Ces intégrales permettent également de calculer les nombres d'Hurwitz spins grâce à la formule ELSV spin prouvée dans [GKL21].<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup>La formule ELSV spin exprime certaines familles de nombres d'Hurwitz spins en termes d'intégrales le long de classes de Chiodo signées (51). Pour  $r = 2$ , on peut utiliser le résultat d'annulation (29) pour montrer que ces intégrales sont des intégrales de Hodge doubles.

Le théorème 6.2.2 est une conséquence d'un énoncé plus général décrivant le potentiel équivariant spin de  $\mathbb{P}^1$ . On décrit cet énoncé à la section suivante après avoir rappelé quelques éléments d'algèbre d'opérateurs.

### 6.3. Fonction tau spin équivariante dans le formalisme d'opérateur

Du point de vue de la physique théorique, les algèbres de fonctions symétriques décalées et super-symétriques décrites au chapitre 4 sont considérées comme des espace de Fock *bosoniques*. Nous rappelons ici quelques éléments d'algèbre d'opérateur sur les produits extérieurs semi-infinis en suivant [OP06b, Lee20, GKL21]. Ceci nous permet de décrire les espaces de Fock *fermioniques* associés aux algèbres ci-dessus. Ce formalisme est particulièrement adapté à la description des invariants (spins) de  $\mathbb{P}^1$ .

**6.3.1. L'espace des produits extérieurs semi-infinis.** — Soit  $V$  l'espace vectoriel de dimension infinie dont la base est indexée par l'ensemble  $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  (les demi-entiers). Un ensemble  $S = \{s_1 > s_2 > \dots\} \subset \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  est dit *semi-infini* si : (i) l'ensemble  $S_+$  des  $s_i$  positifs est fini ; (ii) l'ensemble  $S_-$  des demi-entiers négatifs n'appartenant pas à  $S$  est fini. L'espace des produits extérieurs semi-infinis est l'espace vectoriel dont une base est indexée par les ensembles semi-infinis :

$$\Lambda^{\infty} V = \bigoplus_{S \text{ semi-infini}} \mathbb{C}v_S, \text{ où } v_S \text{ est le produit extérieur } \underline{s_1} \wedge \underline{s_2} \wedge \dots$$

Remarquons que la notation produit extérieur est purement formelle ici mais sera utile pour les manipulations algébriques à venir. On note  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire faisant de l'ensemble  $\{v_S\}_S$  une base orthonormée.

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  une partition, on note

$$v_\lambda = \underline{\lambda_1 - \frac{1}{2}} \wedge \underline{\lambda_2 - \frac{3}{2}} \wedge \dots \in \Lambda^{\infty} V,$$

où l'on a fait de  $\lambda$  une suite infinie en ajoutant des 0. Le vecteur du vide est noté  $v_\emptyset$ . Si  $A$  est un opérateur de  $\Lambda^{\infty} V$ , on appelle espérance du vide la valeur :

$$(137) \quad \langle A \rangle := (Av_\emptyset, v_\emptyset)$$

*Formalisme fermionique.* — Pour  $i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , on note  $\psi_i$ , le  $i$ -ième opérateur de création de fermion :

$$\psi_i v_S = \underline{i} \wedge v_S$$

et  $\psi_i^*$  l'adjoint de  $\psi_i$  (le  $i$ -ième opérateur de délétion). Ces opérateurs satisfont les relations de commutation :

$$(138) \quad \psi_i \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i = \delta_{i,j}, \text{ et } \psi_i^* \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i^* = \psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = 0.$$

Notons que ces relations font de l'espace engendré par les  $\psi_i$  et  $\psi_i^*$  une algèbre de Clifford (de dimension infinie). On définit alors pour toute paire de demi-entiers  $(i, j)$  l'opérateur

(matrice unité) suivant :

$$(139) \quad E_{i,j} =: \psi_i \psi_j^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \psi_i \psi_j^* & \text{si } j > 0, \\ -\psi_j^* \psi_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}_\infty$  est l'ensemble des matrices de taille infini avec un nombre fini de diagonales non-nulles. Le groupe de Weyl de cette algèbre est donné par  $S_\infty = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d$ . La notation  $E_{i,j}$  ci-dessus fournit une représentation de  $\mathfrak{a}_\infty$  sur  $\Lambda^{\frac{\infty}{2}} V$ . De plus, pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , on introduit l'opérateur suivant pour un paramètre formel  $z$  :

$$(140) \quad \mathcal{E}_r(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} e^{z(i-r/2)} E_{i-r,i} + \frac{\delta_{r,0}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}.$$

On définit alors les opérateurs suivants :

$$\mathcal{F}_k = k! [z^k] \mathcal{E}_0(z), \quad \text{et} \quad \alpha_k = \mathcal{E}_k(0).$$

L'opérateur  $C = P_0$  est appelé la *charge* d'un fermion et l'opérateur  $H = \mathcal{F}_1 + \frac{1}{24}$  est l'*énergie*. On note  $\Lambda_0^{\frac{\infty}{2}} V$  l'espace des fermions de charge nulle. Notons que les vecteurs  $v_\lambda$  forment une base de cet espace. De plus pour tout  $k > 0$ , l'opérateur  $\mathcal{F}_k$  est diagonalisable dans cette base avec pour valeurs propres :

$$(141) \quad \mathcal{F}_k v_\lambda = p_k(\lambda) v_\lambda.$$

**6.3.2. Fermions neutres de type B.** — Soit  $m \in \mathbb{Z}$ , on définit les opérateurs suivants:

$$\phi_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{m-\frac{1}{2}} + (-1)^m \psi_{-m-\frac{1}{2}}^* \right) \quad \text{et} \quad \widehat{\phi}_m = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \psi_{m-\frac{1}{2}} - (-1)^m \psi_{-m-\frac{1}{2}}^* \right).$$

L'union de ces deux familles engendre l'algèbre de Clifford décrite ci-dessus. Chacune des ces deux sous-familles engendrent des sous-algèbre isomorphes sous l'involution  $\phi_n \leftrightarrow \widehat{\phi}_n$  que l'on note  $Cl_B$ . De plus on a les relations d'anti-commutation suivantes :

$$(142) \quad \phi_n \phi_m + \phi_m \phi_n = \widehat{\phi}_n \widehat{\phi}_m + \widehat{\phi}_m \widehat{\phi}_n = (-1)^m \delta_{m,-n} \quad \text{et} \quad \phi_n \widehat{\phi}_m + \widehat{\phi}_m \phi_n = 0.$$

On a alors la décomposition :

$$(143) \quad Cl_B = Cl_B^0 \oplus Cl_B^1,$$

où  $Cl_B^p$  est linéairement engendrée par les vecteurs de la forme  $\phi_{m_1} \dots \phi_{m_\ell}$  pour  $\ell \equiv p[2]$ . Notons que les relations ci-dessus impliquent en particulier que  $\phi_m^* = (-1)^m \phi_{-m}$  et donc on introduit les opérateurs :

$$B_{i,j} = \phi_i \phi_j.$$

Ces opérateurs forment une base de l'algèbre orthogonal infinie

$$\mathfrak{b}_\infty = \{ (a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}} \in \mathfrak{a}_\infty \mid a_{n,m} = (-1)^{n+m+1} a_{-n,-m} \}.$$

Le groupe de Weyl de cette algèbre est  $C_\infty = \lim_{d \rightarrow \infty} C(d)$  (limite des groupes de Sergeev introduits en section 4.2.2). On définit les  $B$ -opérateurs pour  $r$  et  $m$  impairs :

$$\alpha_m^B := \sum_{k > m/2} (-1)^k B_{k-m,k},$$

$$\text{et } \mathcal{F}_r^B(z) := \sum_{k>0} (-1)^k k^r B_{k,k}.$$

Pour  $m$  impair, et un paramètre formel  $u$  on définit l'opérateur suivant :

$$\mathcal{B}(m, um) = \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)!}{(um)^{\frac{m-1}{2}}} e^{\alpha_1^B} e^{u \frac{\mathcal{F}_3^B}{3}} \alpha_{-m}^B e^{-u \frac{\mathcal{F}_3^B}{3}} e^{-\alpha_1^B}$$

Avec cette notation, l'opérateur  $\mathcal{B}$  s'étend en une fonction analytique en deux variables (voir [5, proposition 4.2]). Cette propriété est essentielle car l'opérateur  $\mathcal{B}$  permet de faire le lien algébrique entre les théories d'Hurwitz et de Gromov-Witten spins. En effet, les nombres d'Hurwitz spins sont calculés comme des espérances du vide de produits de  $\mathcal{F}_k^B$  et  $\alpha_m^B$  et l'opérateur  $\mathcal{B}$  va servir à la section suivante à représenter l'expression des invariants de Gromov-Witten obtenue en terme de nombre d'Hurwitz par la combinaison de la formule ELSV et de la formule de localisation virtuelle pour l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{P}^1$ . On note

$$B_k = [z^{k+1}] u^{-1} \mathcal{B}(tz, uz) \text{ et } B_k^* = [z^{k+1}] u^{-1} \mathcal{B}^*(-tz, uz).$$

**6.3.3. Fonction tau équivariante spin de  $\mathbb{P}^1$ .** — Les opérateurs  $B_k$  et  $B_k^*$  permettent de décrire explicitement le potentiel spin équivariant de  $\mathbb{P}^1$ .

On note  $H_{\mathbb{C}^*}^*(\text{pt}) = \mathbb{Q}[t]$  la cohomologie équivariante du point ( $t$  est la classe de Chern pour la représentation de poids 1). La cohomologie équivariante de  $\mathbb{P}^1$  est alors décrite comme un module sur  $\mathbb{Q}[t]$  :

$$H_{\mathbb{C}^*}^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Q}[h, t] / (h^2 + th)$$

où  $h$  est la classe équivariante de la classe de Chern de  $\mathcal{O}(1)$ . Une base de ce module est alors donnée par :

$$\mathbf{0} = t + h, \text{ et } \infty = h.$$

En utilisant des paramètres formels  $x = (x_1, x_2, \dots)$  et  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$ , on définit la fonction tau équivariante spin de  $\mathbb{P}^1$  comme :

$$(144) \quad \tau(x, x^*, u, q) := \sum_{g,d} (-8u)^{g-1} (-4q)^d \left\langle \exp \left( 2 \sum_{k \geq 0} x_k \tau_k(\mathbf{0}) + x_k^* \tau_k(\infty) \right) \right\rangle_{g,d}^{\text{loc}}$$

où

$$\langle \tau_{k_1}(\gamma_1) \dots \tau_{k_n}(\gamma_n) \rangle_{g,d}^{\text{loc}} = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^1, d)]^{\text{loc}, \mathcal{O}(-1)}} \prod_{i=1}^n \psi_i^{k_i} \text{ev}_i^*(\gamma_i).$$

**Theorem 6.3.1 ([5]).** *La fonction tau (144) s'exprime comme l'espérance du vide (définie par (137)) d'un opérateur*

$$(145) \quad \tau(x, x^*, u, q) = \left\langle e^{\sum_i x_i B_i} e^{\alpha_1^B} e^{H \log(\frac{q}{u})} \alpha_{-1}^B e^{\sum_i x_i^* B_i^*} \right\rangle$$

Ce théorème caractérise complètement le potentiel spin absolu de  $\mathbb{P}^1$ . En particulier, le secteur stationnaire peut être extrait en posant  $x^* = 0$  et le théorème 6.2.2 ci-dessus est une conséquence de (145). Une seconde conséquence importante de ce théorème est le fait que la fonction tau (144) est une solution (après un changement de variable) de la hiérarchie 2-BKP.

## CHAPITRE 7

### GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE DES GRANDES MULTI-DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre nous présentons des travaux en cours sur la théorie de l'intersection des espaces de  $k$ -différentielles dans la limite de grandes valeurs de  $k$ . Ce type de comportement asymptotique a déjà été étudié au chapitre 5 pour calculer les volumes des espaces de surfaces plates. On présente ici des applications dans un contexte plus général de géométrie énumérative : une preuve alternative de la conjecture de Kontsevich-Witten et une nouvelle famille de relations tautologiques.

#### 7.1. Forme symplectique de Weil-Petersson

**7.1.1. Le point de vue des surfaces ouvertes.** — Soient  $g, n \geq 0$  des entiers satisfaisant  $(2g - 2 + n) > 0$  et soit  $L = (L_1, \dots, L_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ . Une *surface hyperbolique à bords géodésiques* de type  $L$  est la clôture  $S$  d'un ouvert d'une surface hyperbolique dont le bord est une union de :

- géodésiques fermées simples de longueurs prescrites par les  $L_i$  positifs,
- et de singularités paraboliques (pointes) pour les  $L_i$  nuls.

Deux telles surfaces sont considérées équivalentes si elles sont isométriques (en particulier la surface dans laquelle elles sont plongées n'est pas une donnée intrinsèque). Le genre d'une telle surface est le genre de la surface lisse obtenue en contractant chaque géodésique du bord.

On note  $\mathcal{M}_{g,n}^\partial(L)$ , l'espace des modules des surfaces hyperboliques à bords de type  $L$  et de genre  $g$ . Cet espace est naturellement muni d'une structure d'orbivariété réel de dimension  $6g - 6 + 2n$ . La construction des cartes réelles repose sur la représentation d'une surface hyperbolique en pantalons, c'est-à-dire en surfaces de genre 0 à 3 bords. Une telle décomposition fournit un système de coordonnées locales appelées *coordonnées de Fenchel-Nielsen* : celles-ci sont données par les longueurs des bords de pantalons et les paramètres prescrivant le recollement de deux pantalons (voir [FN03]). En utilisant ces coordonnées, on peut munir  $\mathcal{M}_{g,n}^\partial(L)$  d'une forme symplectique  $\omega_{g,n}^\partial(L)$  appelée *forme de Weil-Petersson*. Par ailleurs on note

$$(146) \quad V_{g,n}^\partial : \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

le *volume de Weil-Petersson*, i.e. le volume total de cet espace pour la forme de Weil-Petersson. Mirzakhani a montré que ces volumes satisfont deux propriétés essentielles :

1. On peut calculer ces fonctions par récurrence sur  $g$  et  $n$  en utilisant pour base de l'induction  $V_{0,3}^\partial = 1$ . Ce résultat se déduit des *identités de McShane généralisées* : ce sont des identités satisfaites par les longueurs des géodésiques fermées simples de toute surface hyperbolique à bord de type  $L$  (voir [McS98, Mir07a]).
2. Les volumes de Weil-Petersson s'expriment à partir de la théorie de l'intersection de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  de la façon suivante :

$$(147) \quad V_{g,n}^\partial(L) = \frac{1}{(3g-3+n)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \left( 2\pi^2 \kappa_1 + \sum_{i=1}^n \frac{L_i^2}{2} \psi_i \right)$$

(voir [Mir07b]). Ce second résultat est obtenu en considérant l'espace de toutes les surfaces hyperboliques à bord (avec un marquage des bords) et en appliquant le théorème de Duistermaat-Heckman : à partir de la connaissance de la forme symplectique pour  $L=0$  (calculée par Wolpert dans [Wol86]), on calcule le volume pour toute valeur de  $L$  par déformation.

Ces deux résultats permettent de voir que les volumes sont des polynômes en les  $L_i^2$  (en particulier ces fonctions sont à valeurs finies). De plus en combinant ces résultats on obtient une méthode pour calculer par récurrence les intégrales de produits de classes  $\psi$  et  $\kappa_1$ . En particulier, on peut déduire de cette méthode une nouvelle preuve du théorème de Kontsevich-Witten permettant de calculer par récurrence les intégrales de classes  $\psi$  (voir la section suivante pour un énoncé précis).

**7.1.2. Le point de vue des surfaces coniques.** — Les surfaces coniques ont été introduites en section 2.2.1. On considère ici la donnée d'un vecteur  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  satisfaisant  $|a| < (2g-2+n)$  (i.e. un point de l'ensemble  $\Delta_{g,n}$  défini à la section 2.2.1). On rappelle que l'espace  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  est canoniquement isomorphe à l'espace des courbes complexes lisses  $\mathcal{M}_{g,n}$  bien que  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  ne soit pas canoniquement équipé d'une structure complexe. Remarquons également qu'on a l'identification canonique :

$$(148) \quad \mathcal{M}_{g,n} \simeq \mathcal{M}_{g,n}(0) \simeq \mathcal{M}_{g,n}^\partial(0).$$

On suppose d'abord que  $a$  est un vecteur de petites valeurs (plus précisément, que les  $a_i$  sont plus petits que  $1/2$ ). Sous cette contrainte, l'espace  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  est de nouveau équipé d'une forme symplectique  $\omega_{g,n}(a)$  (que l'on appellera encore forme de Weil-Petersson) et on note  $V_{g,n}(a)$  le volume total de cet espace. Dans [TWZ06], des identités de McShane pour les surfaces coniques sont démontrées et celles-ci permettent de calculer les volumes de ces espaces. On a alors :

$$(149) \quad V_{g,n}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{6g-6+2n}} V_{g,n}^\partial(2i\pi a_1, \dots, 2i\pi a_n).$$

Le problème que l'on va traiter à la section suivante est le suivant :

**Problem 7.1.1.** Comment définir le volume  $V_{g,n}(a)$  pour des valeurs de  $a$  générales dans  $\Delta_{g,n}$  ? Peut-on calculer cette fonction volume ?

Différents travaux ont traité ce problème pour des vecteurs  $a$  dans  $[0, 1]^n$  mais pas pour des vecteurs généraux. Un point commun à ces travaux est le fait que la fonction  $V_{g,n}$  doit être un polynôme par morceaux avec des changements de comportement le long de murs de la forme

$$W_{I,N} = \left\{ a \text{ tel que } \sum_{i \in I} a_i = N \right\}$$

(où  $I$  est un sous-ensemble non-trivial de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $N$  appartient à  $\mathbb{N}^*$ ). Ce fait peut-être vu de différentes manières :

- Les identités de McShane doivent être modifiées pour faire apparaître de nouveaux termes lorsque l'on a passé un mur (voir [TWZ06]).
- Dans [ST11], les volumes de Weil-Petersson sont calculés algébriquement comme des nombres d'intersection sur les espaces des modules de courbes  $a$ -stables définies dans la théorie de Hassett-Keel. Le comportement de ces nombres d'intersection change lorsque des diviseurs de bords de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  doivent être contractés.
- Du point de vue de la physique théorique, les volumes  $V_{g,n}(a)$  sont utilisés pour calculer les intégrales intervenant en théorie de Jackiw-Teitelboim (JT) : il s'agit d'une théorie de la gravitation quantique en dimensions 1 d'espace + 1 de temps introduisant un dilaton pour expliquer la gravitation (voir [Wit20, CJM20]). Les contributions apparaissant lorsque l'on change de domaine d'angles sont calculés à partir de diagrammes de Feynman et traduisent des transformations du comportement des dilatons (voir [MT21]).

En particulier, si l'on note  $P_{g,n}$  l'extension polynomiale de  $V_{g,n}$  à  $\mathbb{R}^n$ , alors les coefficients de ce polynôme sont positifs ou négatifs. Il est donc difficile de déterminer le signe de  $P_{g,n}(a)$  pour une valeur de  $a$  générale.

## 7.2. Une preuve plate du théorème de Kontsevich-Witten

**7.2.1. Construire la fonction volume.** — Fixons un vecteur rationnel  $a$  de  $\Delta_{g,n}$  et un entier positif  $k$  tel que  $ka$  soit un vecteur entier. On note  $\Omega_{g,n}(a, k)$  l'espace des modules de  $k$ -différentielles  $(C, x_1, \dots, x_n, \eta)$  où  $C$  est lisse,  $\eta$  est holomorphe en dehors des points marqués et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\text{ord}_{x_i}(\eta) \geq ka_i.$$

Autrement dit on fixe un profil de singularités minimales aux points marqués en laissant libres les autres singularités. Pour  $k$  suffisamment grand, cet espace est un fibré vectoriel sur  $\mathcal{M}_{g,n}$  et on note  $\mathbb{P}\Omega_{g,n}(a, k)$  son projectivisé. Comme au chapitre 5 on peut considérer la métrique duale de la métrique d'aire sur le fibré en droites  $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}\Omega_{g,n}(a, k)$  et on note

$$(150) \quad V_{g,n}(a, k) = \left( \frac{-1}{k^2} \right)^{3g-3+n} \int_{\mathbb{P}\Omega_{g,n}(a, k)} (c_1(\mathcal{O}(1)))^{r(a,k)-1},$$

où  $r(a, k)$  est le rang du fibré  $\Omega_{g,n}(a, k)$ , et la notation  $(c_1(\mathcal{O}(1)))$  est utilisée pour désigner la courbure de la métrique duale de la métrique d'aire.

**Proposition-Définition 7.2.1 ([8]).** *Il existe  $V_{g,n} : \Delta_{g,n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale par morceaux telle que*

$$(151) \quad V_{g,n}(a, k) = V_{g,n}(a) + O(1/k)$$

quand  $k$  tend vers l'infini (le terme d'erreur est uniforme sur  $\Delta_{g,n}$ ).

La fonction  $V_{g,n}$  définie ainsi coïncide avec la fonction  $V_{g,n}$  calculée pour de petits angles à la section précédente. De plus elle satisfait les propriétés suivantes.

**Théorème 7.2.2 ([8]).** *La fonction  $V_{g,n}$  est un polynôme par morceaux à coefficients rationnels et chaque morceau est explicitement calculable en fonction des polynômes  $P_{g,n}$ .*

*Si l'une des entrées de  $a$  est dans  $\mathbb{N}^*$ , alors on a l'identité  $V_{g,n}(a) = 0$ . De plus, la fonction définie en dehors des vecteurs  $a$  avec une entrée entière par*

$$\text{Vol}_{g,n}(a) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sin(a_i \pi)} V_{g,n}(a)$$

*s'étend continument en une fonction positive ou nulle de  $\Delta_{g,n}$ .*

Comme ce résultat le suggère, on conjecture que le volume de  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  devrait être défini comme  $\text{Vol}_{g,n}(a)$ . Cependant, c'est la fonction  $V_{g,n}(a)$  que nous allons étudier bien que son signe dépende de la parité des parties entières des  $a_i$ . Remarquons que l'annulation des polynômes  $V_{g,n}$  est comme dans le cas des volumes d'espace de surfaces plates due à l'existence de déformations iso-périodiques. Pour les espaces de surfaces coniques hyperboliques cette annulation est également attendue du fait de l'existence de déformations isomonodromiques lorsque l'une des entrées de  $a$  est entière, i.e. de déformations de la structure complexe/hyperbolique de la surface à représentation dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  fixée (voir [Gol97]).

Notons que l'idée générale de ce théorème est de définir les volumes d'espace de surfaces coniques comme des limites de volumes d'espaces de surfaces plates (ou volumes de Masur-Veech). Une telle idée se retrouve en physique des particules. En effet une méthode d'étude de la gravitation JT est de passer par la méthode d'approximation par les modèles de Liouville minimaux  $(2, k)$  (voir [MT21]). Le théorème ci-dessus fournit une version formelle de ces idées sans restriction sur la donnée d'angles. Par, ailleurs un contenu géométrique plus précis du théorème 7.2.2 (et de sa généralisation (154) ci-dessous) pourrait être donné par des méthodes provenant de l'analyse des limites semi-classiques (voir [MZ07]).

**7.2.2. Contraintes de Virasoro.** — Le théorème 7.2.2 permet d'obtenir des relations satisfaites par les polynômes  $P_{g,n}$  en s'appuyant sur l'annulation de  $V_{g,n}$  aux vecteurs avec une valeur entière. Un cas important de telles relations est obtenue si l'on considère l'égalité :

$$(152) \quad V_{g,n+1}(a_1, \dots, a_n, 2) = 0$$

pour des valeurs  $a_i$  petites. Cette relation implique le théorème suivant.

**Théorème 7.2.3.** *Pour toute paire  $(g, n) \neq (0, 3)$  on a*

$$(153) (1+a_1)P_{g,n}(1+a_1, \dots, a_n) - (1-a_1)P_{g,n}(1-a_1, \dots, a_n)$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 < j \leq n} \int_{t=a_j-a_1}^{a_j+a_1} t P_{g,n-1}(\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_j, t, \dots) dt \\
&+ \int_{t=-a_1}^{a_1} \int_{y=0}^t t(y-t) P_{g-1,n+1}(\widehat{a}_1, \dots, y, t-y) dy dt \\
&+ \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I_1 \sqcup I_2 = [2,n]}} \int_{t=-a_1}^{a_1} \int_{y=0}^t t(y-t) P_{g_1,|I_1|+1}(y, \{a_i\}_{i \in I_1}) P_{g_2,|I_2|+1}(t-y, \{a_i\}_{i \in I_2}) dy dt
\end{aligned}$$

(où la notation  $\widehat{a}_i$  signifie que l'on retire l'entrée en question).

Ce théorème est équivalent à la formule de récursion originale prouvée par Mirzakhani par [Du20]. En particulier ce théorème permet de prouver le théorème de Kontsevich-Witten. En effet, les intégrales de classes  $\psi$  peuvent être calculées en considérant la restriction de la formule (153) à la partie homogène de plus haut degré des polynômes  $P_{g,n}$ . La formule obtenue est une expression des contraintes de Virasoro.

### 7.3. Relations tautologiques de Weil-Petersson

À la section précédente nous avons construit un candidat pour le Volume de Weil-Petersson des espaces  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$ . Ici, on va plus généralement construire des classes de cohomologie représentant les puissances d'une forme symplectique de Weil-Petersson. Comme précédemment, on commence par fixer un vecteur rationnel  $a$  de  $\Delta_{g,n}$  et un entier  $k$  tel que  $ka$  soit entier. On considère la compactification d'incidence  $\mathbb{P}\overline{\Omega}_{g,n}(a,k)$  de l'espace  $\mathbb{P}\Omega_{g,n}(a,k)$ . On définit alors la classe de cohomologie suivante :

$$(154) \quad \omega_{g,n,d}(a,k) = \left( \frac{-1}{k^2} \right)^d p_* c_1(\mathcal{O}(1))^{r(a,k)+d-(3g-2+n)} \in H^{2d}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}),$$

où  $p : \mathbb{P}\overline{\Omega}_{g,n}(a,k) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est le morphisme d'oubli de la  $k$ -différentielle. Notons que cette classe de cohomologie représente un courant d'intégration défini à partir de la métrique d'aire. Le théorème 7.2.2 peut alors être généralisé pour montrer qu'il existe des fonctions

$$(155) \quad \omega_{g,n,d} : \Delta_{g,n} \rightarrow H^{2d}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

qui sont polynomiales par morceaux et satisfont :

$$(156) \quad \|\omega_{g,n,d}(a,k) - \omega_{g,n,d}(a)\| = O(1/k).$$

**Remarque 7.3.1.** Notons que l'on n'a pas l'égalité  $\omega_{g,n,d}(a) = \omega_{g,n,1}(a)^d$  à part si  $a$  est petit. Ceci est dû au fait qu'une compactification "raisonnable" des espaces  $\mathcal{M}_{g,n}(a)$  permettant de décrire directement les classes  $\omega_{g,n,d}(a)$  devrait être obtenue en modifiant l'espace  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Pour  $a \in [0, 1]^n$  de tels compactifications se trouvent par exemple dans le programme de Hassett-Keel comme mentionné à la section 7.1.2 (voir [ST11, Has03]).

On obtient des relations tautologiques en observant que les fonctions  $\omega_{g,n,d}$  s'étendent continument au lieu plat  $\partial\Delta_{g,n}$ . On a alors le résultat suivant.

**Théorème 7.3.2.** Si  $d > g$ , alors  $\omega_{g,n,d}(\partial\Delta_{g,n}) = 0$ .

Ces relations sont difficiles à implémenter algorithmiquement. De plus, on ne sait pas pour l'instant si ces relations sont de types Pixton-Faber-Zagier.

*Relations de Do-Norbury.* — Comme on l'a vu pour les volumes de Weil-Petersson, une autre classe de relations beaucoup plus manipulables était donnée par l'annulation des  $V_{g,n}(a)$  lorsque  $a$  possède une entrée dans  $\mathbb{N}^*$ . De telles relations ne sont pas valides en général pour les classes  $\omega_{g,n,d}(a)$ . Cependant si l'une des entrées est égale à 1 alors on a

$$(157) \quad \pi_* \omega_{g,n+1,d}(a_1, \dots, a_n, 1) = 0,$$

où  $\pi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est le morphisme d'oubli du dernier point marqué. Dans le cas particulier  $d = 3g - 3 + n$ , cette égalité avait été observée par Do et Norbury (voir [DN09]). Par ailleurs, ces relations sont plus simples à exprimer que les relations du théorème 7.3.2. Elles permettent notamment de déduire le résultat suivant.

**Theorem 7.3.3.** *Soit  $X$  un variété projective lisse,  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  des classes de  $H^*(X, \mathbb{Q})$ . Pour tout vecteur de nombres complexes  $(a_1, \dots, a_n)$ , on a la relation*

$$(158) \quad \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}(X, \beta)]^{\text{vir}}} \exp \left( \kappa_1 - \psi_{n+1} - \sum_{i=1}^n a_i^2 \psi_i \right) \cdot \prod_{i=1}^n \text{ev}_i^*(\gamma_i) \\ = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{t=0}^{a_j} \left( \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\text{vir}}} \exp \left( \kappa_1 - t^2 \psi_j - \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i^2 \psi_i \right) \cdot \prod_{i=1}^n \text{ev}_i^*(\gamma_i) \right) dt.$$

Attention, dans ce théorème on considère des intégrales *ancestrales*, i.e. les classes  $\psi_i$  sont des pull-back de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Celles-ci peuvent être comparées aux intégrales descendantes considérées au chapitre précédent par exemple [Giv01]. Si  $X$  est un point, Do et Norbury ont montré que cette relation permet de calculer les volumes de Weil-Petersson en genre 0. On ne sait pas pour l'instant si ces arguments sont valides pour une variété cible générale.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AB67] Michael F. ATIYAH et Raoul BOTT : A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I. *Ann. Math. (2)*, 86:374–407, 1967.
- [ABC<sup>+</sup>23] Jørgen Ellegaard ANDERSEN, Gaëtan BOROT, Séverin CHARBONNIER, Vincent DELECROIX, Alessandro GIACCHETTO, Danilo LEWAŃSKI et Campbell WHEELER : Topological recursion for Masur-Veech volumes. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 107(1):254–332, 2023.
- [ABPZ23] Hülya ARGÜZ, Pierrick BOUSSEAU, Rahul PANDHARIPANDE et Dimitri ZVONKINE : Gromov-Witten theory of complete intersections via nodal invariants. *J. Topol.*, 16(1):264–343, 2023.
- [ACG11] Enrico ARBARELLO, Maurizio CORNALBA et Phillip A. GRIFFITHS : *Geometry of algebraic curves. Volume II*, volume 268 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2011. With a contribution by Joseph Daniel Harris.
- [ADG<sup>+</sup>20] Amol AGGARWAL, Vincent DELECROIX, Élise GOUJARD, Peter ZOGRAF et Anton ZORICH : Conjectural large genus asymptotics of Masur-Veech volumes and of area Siegel-Veech constants of strata of quadratic differentials. *Arnold Math. J.*, 6(2):149–161, 2020.
- [Agg19] Amol AGGARWAL : Large genus asymptotics for Siegel-Veech constants. *Geom. Funct. Anal.*, 29(5):1295–1324, 2019.
- [Agg20] Amol AGGARWAL : Large genus asymptotics for volumes of strata of Abelian differentials. *J. Amer. Math. Soc.*, 33(4):941–989, 2020. With an appendix by Anton Zorich.
- [Agg21] Amol AGGARWAL : Large genus asymptotics for intersection numbers and principal strata volumes of quadratic differentials. *Invent. Math.*, 226(3):897–1010, 2021.
- [AJ03] Dan ABRAMOVICH et Tyler J. JARVIS : Moduli of twisted spin curves. *Proc. Am. Math. Soc.*, 131(3):685–699, 2003.

- [Arf41] Cahit ARF : Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. I. *J. Reine Angew. Math.*, 183:148–167, 1941.
- [Ati71] Michael F. ATIYAH : Riemann surfaces and spin structures. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 4:47–62, 1971.
- [BCG<sup>+</sup>18] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER : Compactification of strata of Abelian differentials. *Duke Math. J.*, 167(12):2347–2416, 2018.
- [BCG<sup>+</sup>19a] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER : The moduli space of multi-scale differentials. *arXiv:1910.13492*, 2019.
- [BCG<sup>+</sup>19b] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER : Strata of  $k$ -differentials. *Algebr. Geom.*, 6(2):196–233, 2019.
- [BF97] Kai BEHREND et Barbara FANTECHI : The intrinsic normal cone. *Invent. Math.*, 128(1):45–88, 1997.
- [BGR19] Alexander BURYAK, Jérémy GUÉRÉ et P olo ROSSI : DR/DZ equivalence conjecture and tautological relations. *Geom. Topol.*, 23(7):3537–3600, 2019.
- [BHP<sup>+</sup>23] Younghan BAE, David HOLMES, Rahul PANDHARIPANDE, Johannes SCHMITT et Rosa SCHWARZ : Pixton’s formula and Abel-Jacobi theory on the Picard stack. *Acta Math.*, 230(2):205–319, 2023.
- [Bin05] Gilberto BINI : Chern classes of the moduli stack of curves. *Math. Res. Lett.*, 12(5-6):759–766, 2005.
- [BO00] Spencer BLOCH et Andrei OKOUNKOV : The character of the infinite wedge representation. *Adv. Math.*, 149(1):1–60, 2000.
- [Boi15] Corentin BOISSY : Connected components of the strata of the moduli space of meromorphic differentials. *Comment. Math. Helv.*, 90(2):255–286, 2015.
- [Bou59] Nicolas BOURBAKI : *Éléments de mathématique. Première partie: Les structures fondamentales de l’analyse. Livre II: Algèbre. Chapitre 9: Formes sesquilineaires et formes quadratiques.* Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 1272. Hermann, Paris, 1959.
- [BP08] Jim BRYAN et Rahul PANDHARIPANDE : The local Gromov-Witten theory of curves. *J. Am. Math. Soc.*, 21(1):101–136, 2008.
- [BSSZ15] Alexander BURYAK, Sergey SHADRIN, Loek SPITZ et Dimitri ZVONKINE : Integrals of  $\psi$ -classes over double ramification cycles. *Amer. J. Math.*, 137(3):699–737, 2015.

- [CCC07] Lucia CAPORASO, Cinzia CASAGRANDE et Maurizio CORNALBA : Moduli of roots of line bundles on curves. *Trans. Am. Math. Soc.*, 359(8):3733–3768, 2007.
- [CG22] Dawei CHEN et Quentin GENDRON : Towards a classification of connected components of the strata of  $k$ -differentials. *Doc. Math.*, 27:1031–1100, 2022.
- [Che58] Anneaux de Chow et applications. Séminaire Claude Chevalley (2e année) Tome 3. École Normale Supérieure. Paris: Secrétariat Mathématique (1958)., 1958.
- [Chi06] Alessandro CHIODO : A construction of Witten’s top Chern class in  $K$ -theory. *In Gromov-Witten theory of spin curves and orbifolds*, volume 403 de *Contemp. Math.*, pages 21–29. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [Chi08] Alessandro CHIODO : Towards an enumerative geometry of the moduli space of twisted curves and  $r$ th roots. *Compos. Math.*, 144(6):1461–1496, 2008.
- [Cho56] Wei-Liang CHOW : On equivalence classes of cycles in an algebraic variety. *Ann. Math. (2)*, 64:450–479, 1956.
- [CJ18] Emily CLADER et Felix JANDA : Pixton’s double ramification cycle relations. *Geom. Topol.*, 22(2):1069–1108, 2018.
- [CJM20] Jordan COTLER, Kristan JENSEN et Alexander MALONEY : Low-dimensional De Sitter quantum gravity. *J. High Energy Phys.*, 2020(6):103, 2020. Id/No 48.
- [CJR21] Qile CHEN, Felix JANDA et Yongbin RUAN : The logarithmic gauged linear sigma model. *Invent. Math.*, 225(3):1077–1154, 2021.
- [CMZ18] Dawei CHEN, Martin MÖLLER et Don ZAGIER : Quasimodularity and large genus limits of Siegel-Veech constants. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(4):1059–1163, 2018.
- [CMZ19] Matteo COSTANTINI, Martin MÖLLER et Jonathan ZACHHUBER : The area is a good enough metric. *arXiv:1910.14151*, 2019.
- [Cor89] Maurizio CORNALBA : Moduli of curves and theta-characteristics. *In Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987)*, pages 560–589. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [CZ09] Alessandro CHIODO et Dimitri ZVONKINE : Twisted  $r$ -spin potential and Givental’s quantization. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 13(5):1335–1369, 2009.
- [DGZZ21] Vincent DELECROIX, Élise GOUJARD, Peter ZOGRAF et Anton ZORICH : Masur-Veech volumes, frequencies of simple closed geodesics, and intersection numbers of moduli spaces of curves. *Duke Math. J.*, 170(12):2633–2718, 2021.

- [DGZZ22] Vincent DELECROIX, Élise GOUJARD, Peter ZOGRAF et Anton ZORICH : Large genus asymptotic geometry of random square-tiled surfaces and of random multicurves. *Invent. Math.*, 230(1):123–224, 2022.
- [DM69] Pierre DELIGNE et David MUMFORD : The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (36):75–109, 1969.
- [DN09] Norman DO et Paul NORBURY : Weil-Petersson volumes and cone surfaces. *Geom. Dedicata*, 141:93–107, 2009.
- [DSvZ20] Vincent DELECROIX, Johannes SCHMITT et Jason van ZELM : admcycles – a sage package for calculations in the tautological ring of the moduli space of stable curves. 2020.
- [Du20] Yukun DU : A simple recursion for the mirzakhani volume and its super extension. *arXiv:2008.04458*, 2020.
- [Dub96] Boris DUBROVIN : Geometry of 2D topological field theories. 1620:120–348, 1996.
- [DVV91] Robbert DIJKGRAAF, Herman VERLINDE et Erik VERLINDE : Topological strings in  $d < 1$ . *Nuclear Phys. B*, 352(1), 1991.
- [EM01] Alex ESKIN et Howard MASUR : Asymptotic formulas on flat surfaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(2):443–478, 2001.
- [EMM15] Alex ESKIN, Maryam MIRZAKHANI et Amir MOHAMMADI : Isolation, equidistribution, and orbit closures for the  $SL(2, \mathbb{R})$  action on moduli space. *Ann. of Math. (2)*, 182(2):673–721, 2015.
- [EMZ03] Alex ESKIN, Howard MASUR et Anton ZORICH : Moduli spaces of abelian differentials: the principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (97):61–179, 2003.
- [EO01] Alex ESKIN et Andrei OKOUNKOV : Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials. *Invent. Math.*, 145(1):59–103, 2001.
- [EOP08] Alex ESKIN, Andrei OKOUNKOV et Rahul PANDHARIPANDE : The theta characteristic of a branched covering. *Adv. Math.*, 217(3):873–888, 2008.
- [Eyn14] Bertrand EYNARD : An overview of the topological recursion. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. III*, pages 1063–1085. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
- [EZ15] Alex ESKIN et Anton ZORICH : Volumes of strata of Abelian differentials and Siegel-Veech constants in large genera. *Arnold Math. J.*, 1(4):481–488, 2015.

- [Fab99] Carel FABER : A conjectural description of the tautological ring of the moduli space of curves. pages 109–129, 1999.
- [Fil16] Simion FILIP : Splitting mixed Hodge structures over affine invariant manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 183(2):681–713, 2016.
- [FN03] Werner FENCHEL et Jakob NIELSEN : *Discontinuous groups of isometries in the hyperbolic plane. Edited by Asmus L. Schmidt*, volume 29 de *De Gruyter Stud. Math.* Berlin: Walter de Gruyter, 2003.
- [FP18] Gavril FARKAS et Rahul PANDHARIPANDE : The moduli space of twisted canonical divisors. *J. Inst. Math. Jussieu*, 17(3):615–672, 2018.
- [FSZ10] Carel FABER, Sergey SHADRIN et Dimitri ZVONKINE : Tautological relations and the  $r$ -spin Witten conjecture. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(4):621–658, 2010.
- [Ful98] William FULTON : *Intersection theory*, volume 2 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 1998.
- [Giv01] Alexander B. GIVENTAL : Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians. *Mosc. Math. J.*, 1(4):551–568, 2001.
- [GKL21] Alessandro GIACCHETTO, Reinier KRAMER et Danilo LEWAŃSKI : A new spin on Hurwitz theory and ELSV via theta characteristics. *arXiv:2104.05697*, 2021.
- [Gol97] William M. GOLDMAN : Ergodic theory on moduli spaces. *Ann. Math. (2)*, 146(3):475–507, 1997.
- [GP99] Tom GRABER et Rahul PANDHARIPANDE : Localization of virtual classes. *Invent. Math.*, 135(2):487–518, 1999.
- [GP03] Tom GRABER et Rahul PANDHARIPANDE : Constructions of nontautological classes on moduli spaces of curves. *Michigan Math. J.*, 51(1):93–109, 2003.
- [Has03] Brendan HASSETT : Moduli spaces of weighted pointed stable curves. *Adv. Math.*, 173(2):316–352, 2003.
- [Hil02] David HILBERT : Mathematical problems. Lecture delivered before the international congress of mathematicians at Paris in 1900. Translated by *Mary Winston Newson*. *Bull. Am. Math. Soc.*, 8:437–479, 1902.
- [Iva01] Vladimir N. IVANOV : The Gaussian limit for projective characters of large symmetric groups. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 283(Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 6):73–97, 259, 2001.

- [Jan17] Felix JANDA : Relations on  $\overline{M}_{g,n}$  via equivariant Gromov-Witten theory of  $\mathbb{P}^1$ . *Algebr. Geom.*, 4(3):311–336, 2017.
- [Jar98] Tyler J. JARVIS : Torsion-free sheaves and moduli of generalized spin curves. *Compositio Math.*, 110(3):291–333, 1998.
- [Joh80] Dennis JOHNSON : Spin structures and quadratic forms on surfaces. *J. London Math. Soc. (2)*, 22(2):365–373, 1980.
- [JPPZ17] Felix JANDA, Rahul PANDHARIPANDE, Aaron PIXTON et Dimitri ZVONKINE : Double ramification cycles on the moduli spaces of curves. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 125:221–266, 2017.
- [Kaz22] Maxim KAZARIAN : Recursion for Masur-Veech volumes of moduli spaces of quadratic differentials. *J. Inst. Math. Jussieu*, 21(4):1471–1476, 2022.
- [KL11a] Young-Hoon KIEM et Jun LI : Low degree GW invariants of spin surfaces. *Pure Appl. Math. Q.*, 7(4):1449–1475, 2011.
- [KL11b] Young-Hoon KIEM et Jun LI : Low degree GW invariants of surfaces II. *Sci. China Math.*, 54(8):1679–1706, 2011.
- [KL13] Young-Hoon KIEM et Jun LI : Localizing virtual cycles by cosections. *J. Amer. Math. Soc.*, 26(4):1025–1050, 2013.
- [KL20] Young-Hoon KIEM et Jun LI : Quantum singularity theory via cosection localization. *J. Reine Angew. Math.*, 766:73–107, 2020.
- [KM97] Maxim KONTSEVICH et Yuri MANIN : Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry [ MR1291244 (95i:14049)]. In *Mirror symmetry, II*, volume 1 de *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 607–653. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [KN18] Vincent KOZIARZ et Duc-Manh NGUYEN : Complex hyperbolic volume and intersection of boundary divisors in moduli spaces of pointed genus zero curves. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 51(6):1549–1597, 2018.
- [KO94] Serguei KEROV et Grigori OLSHANSKI : Polynomial functions on the set of Young diagrams. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319(2):121–126, 1994.
- [Kon92] Maxim KONTSEVICH : Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.*, 147(1):1–23, 1992.
- [KZ03] Maxim KONTSEVICH et Anton ZORICH : Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities. *Invent. Math.*, 153(3):631–678, 2003.
- [Lee20] Junho LEE : A square root of Hurwitz numbers. *Manuscr. Math.*, 162(1-2):99–113, 2020.



- [LZ04] Sergei K. LANDO et Alexander K. ZVONKIN : *Graphs on surfaces and their applications*, volume 141 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II.
- [Mas82] Howard MASUR : Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 115(1):169–200, 1982.
- [McM17] Curtis T. MCMULLEN : The Gauss-Bonnet theorem for cone manifolds and volumes of moduli spaces. *Amer. J. Math.*, 139(1):261–291, 2017.
- [McO88] Robert C. MCOWEN : Point singularities and conformal metrics on Riemann surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103(1):222–224, 1988.
- [McS98] Greg MCSHANE : Simple geodesics and a series constant over Teichmüller space. *Invent. Math.*, 132(3):607–632, 1998.
- [Mir07a] Maryam MIRZAKHANI : Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces. *Invent. Math.*, 167(1):179–222, 2007.
- [Mir07b] Maryam MIRZAKHANI : Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves. *J. Amer. Math. Soc.*, 20(1):1–23, 2007.
- [Mir13] Maryam MIRZAKHANI : Growth of Weil-Petersson volumes and random hyperbolic surfaces of large genus. *J. Differential Geom.*, 94(2):267–300, 2013.
- [MP06] Daves MAULIK et Rahul PANDHARIPANDE : A topological view of Gromov-Witten theory. *Topology*, 45(5):887–918, 2006.
- [MP16] Gabriele MONDELLO et Dmitri PANOV : Spherical metrics with conical singularities on a 2-sphere: angle constraints. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16):4937–4995, 2016.
- [MP19] Maryam MIRZAKHANI et Bram PETRI : Lengths of closed geodesics on random surfaces of large genus. *Comment. Math. Helv.*, 94(4):869–889, 2019.
- [MT21] Henry MAXFIELD et Gustavo J. TURIACI : The path integral of 3d gravity near extremality; or, JT gravity with defects as a matrix integral. *J. High Energy Phys.*, 2021(1):56, 2021. Id/No 118.
- [Mum71] David MUMFORD : Theta characteristics of an algebraic curve. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 4:181–192, 1971.
- [Mum83] David MUMFORD : Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves. In *Arithmetic and geometry, Vol. II*, volume 36 de *Progr. Math.*, pages 271–328. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

- [MZ07] Xiaonan MA et Weiping ZHANG : Superconnection and family Bergman kernels. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 344(1):41–44, 2007.
- [OP06a] Andrei OKOUNKOV et Rahul PANDHARIPANDE : The equivariant Gromov-Witten theory of  $\mathbb{P}^1$ . *Ann. Math. (2)*, 163(2):561–605, 2006.
- [OP06b] Andrei OKOUNKOV et Rahul PANDHARIPANDE : Gromov-Witten theory, Hurwitz theory, and completed cycles. *Ann. of Math. (2)*, 163(2):517–560, 2006.
- [OP06c] Andrei OKOUNKOV et Rahul PANDHARIPANDE : Virasoro constraints for target curves. *Invent. Math.*, 163(1):47–108, 2006.
- [Pix] Aaron PIXTON : DR cycle polynomiality and related results. *page web de l'auteur: <https://websites.umich.edu/~pixton/papers/DRpoly.pdf>*.
- [Pol06] Alexander POLISHCHUK : Moduli spaces of curves with effective  $r$ -spin structures. In *Gromov-Witten theory of spin curves and orbifolds*, volume 403 de *Contemp. Math.*, pages 1–20. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [PP17] Rahul PANDHARIPANDE et Aaron PIXTON : Gromov-Witten/pairs correspondence for the quintic 3-fold. *J. Am. Math. Soc.*, 30(2):389–449, 2017.
- [PPZ15] Rahul PANDHARIPANDE, Aaron PIXTON et Dimitri ZVONKINE : Relations on  $mg, n$  via 3-spin structures. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(1):279–309, 2015.
- [PPZ16] Rahul PANDHARIPANDE, Aaron PIXTON et Dimitri ZVONKINE : Tautological relations via  $r$ -spin structures. 2016.
- [PV01] Alexander POLISHCHUK et Arkady VAINTROB : Algebraic construction of Witten's top Chern class. In *Advances in algebraic geometry motivated by physics (Lowell, MA, 2000)*, volume 276 de *Contemp. Math.*, pages 229–249. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [Sch11] Issai SCHUR : Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. Reine Angew. Math.*, 139: 155–250, 1911.
- [Ser85] Aleksandr N. SERGEEV : The tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras  $\mathfrak{gl}(n, m)$  and  $Q(n)$ . *Math. USSR, Sb.*, 51:419–427, 1985.
- [Spe24] Pim SPELIER : Polynomiality of the double ramification cycle. *arXiv:2401.17421*, 2024.
- [ST11] Georg SCHUMACHER et Stefano TRAPANI : Weil-Petersson geometry for families of hyperbolic conical Riemann surfaces. *Michigan Math. J.*, 60(1):3–33, 2011.

- [Tel12] Constantin TELEMAN : The structure of 2D semi-simple field theories. *Invent. Math.*, 188(3):525–588, 2012.
- [Thu98] William P. THURSTON : Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. *In The Epstein birthday schrift*, volume 1 de *Geom. Topol. Monogr.*, pages 511–549. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.
- [Thu22] William P. THURSTON : *Collected Works of William P. Thurston with Commentary: IV. The geometry and topology of three-manifolds: with a preface by Steven P. Kerckhoff. Edited by Benson Farb, David Gabai and Steven P. Kerckhoff.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2022.
- [Tro86] Marc TROYANOV : Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseign. Math. (2)*, 32(1-2):79–94, 1986.
- [Tro91] Marc TROYANOV : Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2):793–821, 1991.
- [TWZ06] Ser Peow TAN, Yan Loi WONG et Ying ZHANG : Generalizations of McShane’s identity to hyperbolic cone-surfaces. *J. Differential Geom.*, 72(1):73–112, 2006.
- [VdW28] Bartel L. Van der WAERDEN : Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems. *Math. Ann.*, 99:497–541, 1928.
- [Vee82] William A. VEECH : Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Ann. of Math. (2)*, 115(1):201–242, 1982.
- [Vee93] William A. VEECH : Flat surfaces. *Amer. J. Math.*, 115(3):589–689, 1993.
- [Vee98] William A. VEECH : Siegel measures. *Ann. of Math. (2)*, 148(3):895–944, 1998.
- [Vor05] Yaroslav VOROBETS : Periodic geodesics on generic translation surfaces. *In Algebraic and topological dynamics*, volume 385 de *Contemp. Math.*, pages 205–258. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [Wei46] André WEIL : *Foundations of algebraic geometry*, volume 29 de *Colloq. Publ., Am. Math. Soc.* American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1946.
- [Wit91] Edward WITTEN : Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. *In Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990)*, pages 243–310. Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.
- [Wit93] Edward WITTEN : Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity. *In Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991)*, pages 235–269. Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

- [Wit20] Edward WITTEN : Matrix models and deformations of JT gravity. *Proc. R. Soc. Lond., A, Math. Phys. Eng. Sci.*, 476(2244):29, 2020. Id/No 20200582.
- [Wol86] Scott A. WOLPERT : Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves. *Invent. Math.*, 85(1):119–145, 1986.
- [Yin16] Qizheng YIN : Cycles on curves and Jacobians: a tale of two tautological rings. *Algebr. Geom.*, 3(2):179–210, 2016.
- [Zor06] Anton ZORICH : Flat surfaces. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, pages 437–583. Springer, Berlin, 2006.

## RÉSUMÉ

L'objet de ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches est de présenter ma contribution au développement de deux domaines émergents d'application des outils de géométrie énumérative : l'étude des *surfaces plates* et des *courbes spins*. Ces deux classes d'objets et leurs espaces des modules ont été étudiés dès les années 80 et plusieurs travaux suggéraient des ponts avec la géométrie énumérative. Cependant, ce n'est qu'au cours des dernières années que les outils développés dans le cadre de la théorie de Gromov-Witten ont trouvé leur application concrète dans l'étude de ces deux domaines.

Dans un premier temps, on exposera des travaux autour de la construction et du calcul de classes de cohomologie ou de Chow dans des espaces de modules, en premier lieu les classes associées aux strates de différentielles méromorphes, et leurs raffinements en fonction de l'invariant de Arf des structures spins. Ces problèmes nous amèneront à l'étude des classes de Witten et cycles de double ramification et des faisceaux de conjectures reliant ces différentes familles de classes de cohomologie. On présentera également des applications de ces résultats à l'étude de la structure des anneaux cohomologie (tautologiques) des espaces des modules de courbes.

Ces résultats sont le fondement d'une seconde série de travaux dédiés à la description de grandeurs numériques construites à partir de points de vues différentiels et/ou dynamiques sur les espaces des modules de surfaces plates ou hyperboliques : volumes de Masur-Veech ou Weil-Petersson, exposants de Lyapunov et constantes de Siegel-Veech. On démontre que certains de ces invariants peuvent être exprimés comme des intégrales de classes de cohomologie. Ces expressions permettent de révéler des structures combinatoires insoupçonnées décrivant ces familles de nombres.

Enfin, on présentera des résultats autour de la géométrie énumérative des applications vers des courbes spins. Deux théories différentes produisent des invariants associés à ces applications : les théories de Gromov-Witten et de Hurwitz. Pour une cible de genre 0, ces deux théories sont reliées par une correspondance et produisent des solutions de la hiérarchie intégrable BKP.