Singularités et temps long pour équations de fluides et de réaction-diffusion

Charles Collot

Contents

CHAPTER 1

Equations de transport et de la chaleur lineaires

Ce premier chapitre étudie deux *exemples fondamentaux* à connaître sur le bout des doigts : l'équation de transport à coefficients constants, et l'équation de la chaleur. Pour chacun, nous obtenons une formule explicite pour la solution, appelée *formule de representation.*

1. Equation de transport

De nombreux phénomènes physiques mettent en jeux l'*advection.* C'est le transport d'une quantité d'un élément donné (tel que la densité d'un élément chimique, la température etc.) par le mouvement du milieu environnant. Nous prendrons comme milieu environnant $\mathbb{R}^n$ pour un entier n, et noterons par $u(t,x)$ cette quantité au temps t au point x. Si la vitesse dans le milieu est constante, donnée par un vecteur $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, alors l'équation satisfaite par u est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) = 0$$

pour tout temps $t > 0$ et pour tout point $x \in \mathbb{R}$. Pour simplifier la notation, nous écrirons

$$u_t + b.\nabla u = 0 \qquad \text{pour } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d. \tag{1.1}$$

Afin de résoudre (1.1), nous remarquons que le membre de gauche de (1.1) est la dérivée directionnelle dans la direction $(1,b)$ sur $\mathbb{R}^{1+n}$. Les points dans cette direction sont de la forme $(t+s, x+bs)$ pour $s \in \mathbb{R}$. Pour chaque $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ nous introduisons donc

$$z(s) = u(t+s, x+sb). \tag{1.2}$$

On calcule alors, en utilisant la différentiation d'une composition de fonctions puis (1.1), que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds}(s) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t+s, x+sb) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(t+s, x+sb) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Donc z est une constante indépendante de s. On obtient donc le résultat suivant.

Lemme 1.1. *On a que $u \in C^1((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ est solution de (1.1) si et seulement si*

$$u(t+s, x+sb) = u(t,x)$$

pour tous $t > 0$, $s > -t$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Proof. Soit $u \in C^1((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Soit alors z définie par (1.2).

Alors u est solution de (1.1) si et seulement si pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\frac{dz}{ds}(s) = 0$ par (1.3). Cela est vérifié si et seulement si $z(s) = z(0)$ pour tous $s > -t$, soit $u(t+s, x+sb) = u(t,x)$ comme énoncé.

□

1.1. Probleme de Cauchy. Le *problème de Cauchy* pour une équation aux dérivées partielles est la question de déterminer la solution étant donnée une certaine condition initiale. Pour l'équation de transport (1.1), il s'écrit

$$\begin{cases} u_t + b.\nabla u = 0 & \text{pour } (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ci-dessus u_0 est une fonction donnée, qui représente l'état du système au temps initial $t = 0$.

LEMME 1.2. *Supposons que* $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$*. Alors* $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ *est solution de* (1.4) *si et seulement si*

$$u(t,x) = u_0(x - tb) \tag{1.5}$$

pour $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

PROOF. Soit $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. Alors u satisfait la première égalité de (1.4) si et seulement si $u(t+s, x+sb) = u(t,x)$ par le Lemme 1.1, ce qui est équivalent à $u(t,x) = u(0, x-tb)$. En utilisant la seconde égalité de (1.4) on a $u(0,x-tb) = u_0(x-tb)$. On obtient alors que u est solution de (1.4) si et seulement si $u(t,x) = u_0(x-tb)$.

□

1.2. Probleme inhomogene. Une équation aux dérivée partielle est dite *inhomogène* lorsqu'un des termes de l'équation ne dépend pas de l'inconnue. Cela peut représenter un forçage du système par un effet extérieur. Dans le cas présent, il s'écrit

$$\begin{cases} u_t + b.\nabla u = f & \text{pour } (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.6}$$

LEMME 1.3. *Supposons que* $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $f \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$*. Alors* $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ *est une solution de* (1.6) *si et seulement si*

$$u(t,x) = u_0(x-tb) + \int_0^t f(s, x+(s-t)b)ds \tag{1.7}$$

pour $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

PROOF. Implication directe. Soit $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ une solution de (1.6). On définit pour $y \in \mathbb{R}^n$ la fonction $z(t) = u(t, y+tb)$. Alors on a en utilisant successivement la différentiation d'une composée de fonctions puis la première égalité dans (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= u_t(t, y+tb) + b.\nabla u(t, y+tb) \\ &= f(t, y+tb). \end{aligned}$$

Donc en intégrant $z(t) = z(0) + \int_0^t f(s, y+sb)ds$. Comme $z(t) = u(t, y+tb)$, et $z(0) = v(0,y) = u_0(y)$ par la seconde égalité dans (1.6), on obtient

$$u(t, y+tb) = u_0(y) + \int_0^t f(s, y+sb)ds.$$

En posant $y = x - tb$ dans l'identité ci-dessus on obtient que $u(t,x) = u_0(x-tb) + \int_0^t f(s, x+(s-t)b)ds$. Donc u est bien donnée par (1.7).

Implication indirecte. Vérifions que u donnée par (1.7) vérifie $u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ et est une solution de (1.6). On a $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, donc en différentiant sous le signe intégral dans (1.7) on a bien que $u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$.

En prenant $t = 0$ dans (1.7) on a que $u(0,x) = u_0(x)$. De plus, en définissant pour $y \in \mathbb{R}$ la fonction z par $z(t) = u(t, y + tb)$, on a en utilisant (1.5) que

$$\begin{aligned} z(t) &= u_0(y + tb - tb) + \int_0^t f(s, y + tb + (s - tb))ds \\ &= u_0(x) + \int_0^t f(s, y + sb)ds. \end{aligned}$$

En différentiant, il vient d'une part

$$\frac{dz}{dt}(t) = f(t, y + tb). \tag{1.8}$$

Puisque $z(t) = u(t, y + tb)$ on a d'autre part en différentiant une composée de fonctions

$$\frac{dz}{dt}(t) = u_t(t, y + tb) + b.\nabla u(t, y + bt) \tag{1.9}$$

En combinant (1.8) et (1.9) on a $u_t(t, y + tb) + b.\nabla u(t, y + bt) = f(t, y + tb)$. En posant $y = x - tb$ on obtient $u_t(t,x) + b.\nabla u(t,x) = f(t,x)$. Donc u résout (1.6).

□

2. Equation de la chaleur

La diffusion survient lorsqu'une quantité d'un élément donné (une densité de charge, le nombre de personnes infectées par un virus etc.) se déplace dans un milieu et que, en chaque point, la direction moyenne de ce mouvement soit nulle. Elle tend alors à se répartir dans le milieu. Si l'on imagine un banc de poissons dans une rivière, il y aura deux type de mouvements : un mouvement collectif dû au courant de la rivière (c'est l'advection de la sous-section précédente), et, à l'intérieur du groupe on aura un éparpillement car chaque poisson va plus ou moins vite (c'est la diffusion étudiée dans cette sous-section).

Le prototype d'équation de diffusion est l'équation de la chaleur

$$u_t = \Delta u \tag{1.10}$$

où l'opérateur de Laplace est

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u.$$

2.1. Solution fondamentale. L'étude des solutions de (1.10) se fait en utilisant une solution très particulière K, appelée *solution fondamentale*. L'intérêt est qu'à partir de cette solution on pourra retrouver toutes les solutions : c'est la *méthode des fonctions de Green*. La solution fondamentale K est la solution du problème de Cauchy formel

$$\begin{cases} K_t = \Delta K, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ K(0,x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.11}$$

où δ_0 est la masse de Dirac en 0. On remarque que le sens de (1.11) n'est pas clair mathématiquement. Pour préciser son sens, on va dire qu'une fonction $K \in$

$C^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ avec $K(t,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $t>0$ est une solution de (1.11) si elle satisfait

$$\begin{cases} K_t = \Delta K, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\\ \lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x)\varphi(x)dx = \varphi(0) & \text{pour toute fonction } \varphi \text{ continue bornée.}\end{cases} \tag{1.12}$$

On a donc interprété la seconde égalité dans (1.11) comme une trace lorsque $t\downarrow 0$ pour K dans le dual de l'espace des fonctions continues et bornées. Le système (1.12) est bien maintenant bien défini mathématiquement.

Lemme 1.1. *La fonction dite* noyau de la chaleur

$$K(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \tag{1.13}$$

est une solution de l'équation de la chaleur (1.10) *sur* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$*. De plus, celle-ci satisfait pour tout* $t>0$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x)dx = 1 \tag{1.14}$$

et pour toute fonction $\varphi\in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x)\varphi(x)dx = \varphi(0). \tag{1.15}$$

Remark 1.1. La convergence (1.15) implique en particulier que lorsque $t\downarrow 0$ on a que la fonction $K(t,\cdot)$, considérée comme une distribution, converge au sens des distributions vers un delta de Dirac à l'origine δ_0 au sens où

$$\lim_{t\downarrow 0}\langle K(t,\cdot),\varphi\rangle = \lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x)\varphi(x)dx = \varphi(0) = \langle\delta_0,\varphi\rangle$$

pour toute fonction test $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Remark 1.2. Posons $\Psi(y) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-|y|^2/4}$. Alors par (1.13) on a

$$K(t,x) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{1.16}$$

Cela signifie qu'à tout instant $t>0$, la fonction K s'obtient à partir de la fonction Ψ en faisant le changement de variable $y=\frac{x}{\sqrt{t}}$ et en multipliant par le facteur $t^{-n/2}$. Le changement de variable $y\mapsto x=\sqrt{t}y$ est ce qu'on appelle un changement d'échelle : c'est une homothétie de centre l'origine et de rapport $\sqrt{t}$. On appelle une telle fonction une fonction *auto-similaires progressive.*

Proof. On peut démontrer le lemme rapidement, en montrant par un calcul direct que la transformée de Fourier inverse de (1.18) est bien (1.13). La démonstration qui suit est un peu plus longue mais expliquera pourquoi le noyau de la chaleur est une fonction auto-similaire progressive, ce qui sera très utile pour comprendre la suite du cours. Elle se fait en trois étapes :

- étape 1 : on démontre que la solution de (1.12), si elle existe, est unique.
- étape 2 : on démontre que le problème (1.12) est invariant par un changement d'échelle, et est invariant par rotation. On en déduit par l'étape 1 que la solution K, si elle existe, hérite donc des symétries du problème et est nécessairement elle aussi invariante par changement d'échelle et par rotation.
- étape 3 : on déduit de l'étape 2 que K doit être sous la forme $K(t,x) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\psi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$ pour une fonction ψ à déterminer. On trouve alors facilement que ψ est la fonction gaussienne.

Étape 1. *Unicité.* Montrons que s'il existe une fonction $K \in C^\infty((0,\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ (où $\mathcal{S}$ désigne l'espace de Schwartz) qui est une solution de (1.12), alors celle-ci est unique.

Soit $\hat{K}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} K(t,x)dx$ la transformée de Fourier de K. Alors en appliquant la deuxième égalité de (1.12) avec $\phi(x) = e^{i\xi.x}$ on a

$$\lim_{t\downarrow 0} \hat{K}(t,\xi) = \lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} K(t,x)dx = e^{-\xi.0} = 1. \tag{1.17}$$

Ensuite, en utilisant la première équation dans (1.12), puis en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\hat{K}(t,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}\Delta K(t,x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta e^{-i\xi.x} K(t,x)dx \\ &= -|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} K(t,x)dx.\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial}{\partial t}\hat{K}(t,\xi) = -|\xi|^2\hat{K}(t,\xi)$. En résolvant cette équation différentielle ordinaire linéaire en utilisant (1.17) on trouve

$$\hat{K}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}. \tag{1.18}$$

Puisque la transformée de Fourier est une application injective sur $\mathcal{S}$, la fonction K qui vérifie (1.18) est bien unique comme annoncé.

Étape 2. *Invariances.* Montrons que s'il existe une solution $K \in C^\infty((0,\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ de (1.12), alors d'une part $K(t,x) = \frac{1}{\lambda^n}K(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda})$ pour tout $\lambda > 0$, et d'autre part K est une fonction radiale i.e. $K(t,x_1) = K(t,x_2)$ si $|x_1| = |x_2|$.

En effet, posons pour $\lambda > 0$ la fonction $K'(t,x) = \frac{1}{\lambda^n}K(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda})$. Alors par un calcul direct

$$\frac{\partial}{\partial t}K'(t,x) = \frac{1}{\lambda^{n+2}}K(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}) \quad \text{et} \quad \Delta K(t,x) = \frac{1}{\lambda^{n+2}}\Delta K(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}).$$

Et donc $\frac{\partial}{\partial t}K' = \Delta K'$. En outre, pour toute fonction continue bornée φ, en faisant le changement de variable $y = \frac{x}{\lambda}$ et en posant $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(y)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} K'(t,x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda})\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} K(\frac{t}{\lambda}, y)\tilde{\varphi}(y)dy$$

Puisque $\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} K(\frac{t}{\lambda}, y)\tilde{\varphi}(y)dy = \tilde{\varphi}(0)$ par la deuxième égalité de (1.12), et puisque $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(0)$, on en déduit

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} K'(t,x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Donc K' est aussi une solution de (1.12). Par le résultat d'unicité l'étape 1, on a donc $K = K'$. Donc $K(t,x) = \frac{1}{\lambda^n}K(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda})$.

Soient maintenant x_1 et x_2 deux points tels que $|x_1| = |x_2|$. Alors il existe une rotation R de $\mathbb{R}^n$ telle que $Rx_1 = x_2$. Posons $K''(t,x) = K(t,Rx)$. Alors par des calculs très similaires à ceux effectués pour K', on a que K'' est à nouveau une solution de (1.12). Par le résultat d'unicité l'étape 1, on a $K = K''$. Donc $K(t,x) = K(t,Rx)$, et ainsi $K(t,x_1) = K(t,x_2)$.

Étape 3. *Auto-similarité et formule pour K.* Par l'étape 2 on a

$$K(t,x) = \frac{1}{\lambda^n}K(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}) \qquad \forall(\lambda,t,x) \in (0,\infty)^2 \times \mathbb{R}^n.$$

En choisissant $\lambda=\sqrt{t}$ dans cette identité et en posant $\Psi(x)=K(1,x)$ on a alors $K(t,x)=\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\Psi(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Toujours par l'étape 2 on a que $K(1,x)$ est une fonction radiale et ne dépend que de $|x|$, et donc $K(1,x)=\psi(|x|)$ pour une fonction ψ. Donc $\Psi(y)=\psi(|y|)$. On a alors

$$K(t,x)=\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\psi(\frac{|x|}{\sqrt{t}}) \tag{1.19}$$

Nous allons maintenant déterminer ψ. L'équation de la chaleur (1.13) pour une fonction radiale $K(t,x)=K(t,|x|)$ (en faisant un abus de notation) s'écrit pour $r=|x|$

$$\partial_t K=\partial_{rr}K+\frac{n-1}{r}\partial_r K.$$

Pour une fonction sous la forme (1.19) on calcule que

$$\partial_t K=-\frac{n}{2}\frac{1}{t^{\frac{n}{2}+1}}\psi(\frac{r}{\sqrt{t}})-\frac{r}{2t^{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}}\psi'(\frac{r}{\sqrt{t}}) \ =\frac{1}{t^{\frac{n}{2}+1}}\left(-\psi-\frac{\rho}{2}\psi'\right)(\frac{r}{\sqrt{t}})$$

où $\rho=\frac{r}{\sqrt{t}}$. On calcule également que $\partial_{rr}K=\frac{1}{t^{\frac{n}{2}+1}}\psi''(\frac{r}{\sqrt{t}})$ et $\frac{1}{r}\partial_r K=\frac{1}{t^{\frac{n}{2}+1}}(\frac{1}{\rho}\psi')(\frac{r}{\sqrt{t}})$. On a donc

$$0=-\partial_t K+\partial_{rr}K+\frac{n-1}{r}\partial_r K=\frac{1}{t^{\frac{n}{2}+1}}\left(\frac{n}{2}\psi+\frac{\rho}{2}\psi'+\psi''+\frac{n-1}{\rho}\psi'\right)(\frac{r}{\sqrt{t}}).$$

On en déduit que K résout (1.10) si et seulement si ψ résout

$$\frac{n}{2}\psi+\frac{\rho}{2}\psi'+\psi''+\frac{n-1}{\rho}\psi'=0.$$

Cela se réécrit

$$(\frac{\rho^n}{2}\psi+\rho^{n-1}\psi')'=0.$$

Cela est en particulier satisfait si $\frac{\rho}{2}\psi+\psi'=0$, ce qui donne $\frac{\rho}{2}+(\ln\psi)'=0$. La solution est $\psi=Ce^{-\frac{\rho^2}{4}}$ pour C une constante d'intégration. Puisque l'on souhaite $\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x)dx=1$ on choisit $C=\left(\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4}}\rho^{n-1}d\rho\right)^{-1}=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}$.

Étape 4 *Preuve de* (1.15). Soit $\epsilon>0$. Pour $\delta>0$ on décompose :

$$\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x)\varphi(x)dx \ =\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x)\varphi(0)dx+\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx$$
$$=\underbrace{\varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x)dx}_{I}+\underbrace{\int_{|x|\leq\delta}K(t,x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx}_{II}+\underbrace{\int_{|x|>\delta}K(t,x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx}_{III}.$$

Par (1.14)

$$I=\varphi(0)$$

et

$$|II|\leq\sup_{|x|\leq\delta}|\varphi(x)-\varphi(0)|\int_{|x|\leq\delta}K(t,x)dx\leq\sup_{|x|\leq\delta}|\varphi(x)-\varphi(0)|\leq\frac{\epsilon}{2}$$

pour δ assez petit par continuité de f. Puis en utilisant (1.13) et un changement de variable

$$|III|\leq 2\|\varphi\|_{L^\infty}\int_{|x|>\delta}K(t,x)dx=\frac{2\|\varphi\|_{L^\infty}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{|y|>\frac{\delta}{\sqrt{t}}}e^{-\frac{|y|^2}{4}}dy\leq\frac{\epsilon}{2}$$

pour t assez petit. Donc $|I-\varphi(0)|\leq\epsilon$ ce qui démontre (1.15).

□

2.2. Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur. Le problème de Cauchy associé à l'équation de la chaleur est

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.20}$$

PROPOSITION 1.1. *Soit u_0 continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$. Alors la fonction*

$$u(t,x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} K(t,y) u_0(x-y) dy & \text{si } t > 0, \\ u_0(x) & \text{si } t = 0, \end{cases} \tag{1.21}$$

satisfait $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ et est une solution de (1.20).

Remark 1.3. On remarque que la donnée initiale u_0 n'est pas forcément deux fois différentiable et donc que Δu_0 n'est pas forcément bien défini en tant que fonction. Néanmoins, la proposition permet de donner un sens à l'équation (1.20).

De plus, on constate que la solution est instantanément C^∞ dès que $t > 0$. On appelle cela l'*effet régularisant* de l'équation de la chaleur.

PROOF. En reconnaissant un produit de convolution, on a que

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(t,y) u_0(x-y) dy = (K(t,\cdot) * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y) u_0(y) dy.$$

En différentiant le membre de droite, on obtient

$$u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_t K(t,x-y) - \Delta K(t,x-y) \right) u_0(y) dy \;\; = 0.$$

Puisque K et toutes ses dérivées décroissent exponentiellement vite, on obtient de manière similaire que $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$.

Montrons maintenant que la formule (1.21) définie une fonction continue jusqu'en $t = 0$, et égale à u_0 en $t = 0$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on décompose

$$u(t,x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} K(t,y) u_0(x_0 - y) dy}_{I} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} K(t,y)(u_0(x-y) - u_0(x_0 - y)) dy}_{II}.$$

On a que $I \to u_0(x_0)$ lorsque $t \downarrow 0$ par le lemme 1.1. On a

$$|II| \leq \int_{|y| \leq \delta} K(t,y) |u_0(x-y) - u_0(x_0 - y)| dy + 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|y| \geq \delta} K(t,y) dy$$

et donc $|II| \to 0$ lorsque $(t,x) \to (0,x_0)$ par un calcul analogue à celui de la preuve du Lemme 1.1. Ainsi, $u \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ et $u(0,x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Les solutions de la proposition 1.1 sont uniques. Cette unicité vaut pour des données initiales à croissance au plus exponentielle. Nous aurons besoin de ce résultat plus tard dans la section 7 pour étudier les solutions de l'équation de Burgers visqueuse. On dit qu'une fonction $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est à croissance au plus exponentielle si pour tout $T > 0$ il existe $C, \mu > 0$ tel que $|f(t,x)| \leq Ce^{\mu|x|}$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. On étend cette définition aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

PROPOSITION 1.2. *Soit u_0 continue à croissance au plus exponentielle. Alors u donnée par* (1.21) *est l'unique solution de* (1.20) *dans $C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ qui soit à croissance au plus exponentielle.*

Proof. Les preuves du fait que u donnée par (1.21) est une solution de (1.20) dans $C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)\cap C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, et du fait que u est à croissance au plus exponentielle, sont si similaires aux preuves de la proposition 1.1 que nous les omettons.

Nous nous contenterons donc seulement de démontrer l'unicité. Nous allons montrer que pour $u_0=0$ la fonction $u=0$ est l'unique solution de (1.21) dans $C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)\cap C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ qui soit à croissance au plus exponentielle. Cela démontrera l'unicité pour un u_0 quelconque, puisqu'alors si u et v sont deux solutions de donnée initiale u_0, par linéarité la différence $u-v$ est aussi une solution de donnée initiale 0, et donc $u-v=0$, soit $u=v$.

Soit maintenant une solution $u\in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)\cap C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ de (1.21), telle que $u(0,x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, et telle que $|u(t,x)|\leq Ce^{\mu|x|}$ pour tous $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, pour deux constantes $C,\mu>0$. Nous allons mettre en oeuvre une méthode appelée estimation d'énergie, qui consiste à étudier la variation au cours du temps d'une quantité intégrée bien choisie.

Soit $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $0\leq\chi\leq1$ avec $\chi(x)=1$ pour $|x|\leq1$, et $\chi(x)=0$ pour $|x|\geq2$ (on appelle χ une fonction *localisante*). Pour $R>1$ on pose $\chi_R(x)=\chi(x/R)$ et $u_R(t,x)=\chi_R(x)u(t,x)$. Soit $w(x)=e^{-K|x|}$ pour une constante $K>2\mu$. On pose

$$E(t)=\int_{\mathbb{R}^n}u^2(t,x)w(x)dx\qquad\text{et}\qquad E_R(t)=\int_{\mathbb{R}^n}u_R^2(t,x)w(x)dx.$$

En utilisant que $\int_{|x|>R}u^2(t,x)w(x)dx\leq\int_{|x|>R}e^{-(K-2\mu)|x|}dx\to0$ lorsque $R\to\infty$, on a que $E(t)$ est une intégrale absolument convergente et que $E_R\to E$ lorsque $R\to\infty$ uniformément sur $[0,T]$. De part les hypothèses de régularité sur u on a $E_R\in C([0,T])\cap C^1((0,T])$. La fonction E est donc continue sur $[0,T]$ comme limite de fonctions continues. Comme $\partial_t u=\Delta u$ la fonction u_R satisfait

$$\partial_t u_R=\Delta u_R-2\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\frac{\partial}{\partial x_i}\chi_R)u\right)+\Delta\chi_R u$$

pour $t>0$. Ainsi, en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_R(t)&=2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\Delta u_R-2\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\frac{\partial}{\partial x_i}\chi_R)u\right)+\Delta\chi_R u\right)u_R w dx\\&=-2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_R(t,x)|^2w(x)dx-2\int u_R(\nabla u_R.\nabla w)\\&\quad+4\int(\nabla\chi_R.\nabla u_R)uw+4\int uu_R(\nabla\chi_R.\nabla w)+2\int\Delta\chi_R uu_R w\end{aligned}$$

Comme $\nabla w(x)=-K\frac{x}{|x|}e^{-K|x|}$ on a $|\nabla w|\leq Kw$. Comme $\nabla\chi_R(x)=R^{-1}\nabla\chi(x/R)$ et $\Delta\chi_R(x)=R^{-2}\Delta\chi(x/R)$ et que $\nabla\chi$ et $\Delta\chi$ sont des fonctions bornées, il existe une constante L telle que $|\nabla\chi_R|+|\Delta\chi_R|\leq L$ pour $R\geq1$. Donc par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\left|\int u_R(\nabla u_R.\nabla w)\right|&\leq K\int|u_R||\nabla u_R|w\\&\leq K\left(\int|u_R|^2w\right)^{\frac12}\left(\int|\nabla u_R|^2w\right)^{\frac12}=K\sqrt{E_R}\left(\int|\nabla u_R|^2w\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

et de manière très similaire

$$\left|\int (\nabla\chi_R.\nabla u_R)uw\right| \le L\sqrt{E}\left(\int |\nabla u_R|^2 w\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left|\int uu_R(\nabla\chi_R.\nabla w)\right| \le LK\sqrt{E}\sqrt{E_R}$$
$$\left|\int \Delta\chi_R uu_R w\right| \le L\sqrt{E}\sqrt{E_R}.$$

En combinant ces inégalités et en utilisant de plus $E_R \le E$, on obtient

$$\frac{d}{dt}E_R(t) \le -2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R|^2 w(x) + (2K+4L)\sqrt{E}\left(\int |\nabla u_R|^2 w\right)^{\frac{1}{2}} + (4KL+2L)E$$

On rappelle l'inégalité de Cauchy :

$$ab \le \frac{\kappa}{2}a^2 + \frac{1}{2\kappa}b^2.$$

On a donc en prenant $\kappa = K+2L$ que

$$(2K+4L)\sqrt{E}\left(\int |\nabla u_R|^2 w\right)^{\frac{1}{2}} \le (K+2L)^2 E + \int |\nabla u_R|^2 w.$$

En combinant, on obtient ainsi que

$$\frac{d}{dt}E_R(t) \le -\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R|^2 w(x) + (K+2L)^2 E + (4KL+2L)E \le L_3 E(t)$$

pour une constante $L_3 = (K+2L)^2 + 4KL + 2L$. En intégrant il vient $E_R(t) \le E_R(t_0) + L_3\int_{t_0}^t E(t')dt'$ pour $0 < t_0 < t \le T$. En faisant tendre R vers ∞ et t_0 vers 0 on obtient

$$E(t) \le E(0) + L_3\int_0^t E(s)ds.$$

Par le lemme de Gronwall on a $E(t) \le E(0)e^{L_3 t}$. Comme $E(0) = 0$ car $u_0 = 0$, on conclut que $E(t) = 0$ et donc $u = 0$.

□

Remark 1.4. Tychonoff a montré qu'il n'y a pas unicité pour certaines solutions de l'équation de la chaleur, qui ont une croissance à l'infini en espace plus rapide qu'exponentielle.

3. Exercices

Ajouter exercice general sur principe du maximum pour equation advection-diffusion lineaire

EXERCICE 1.1 (Principe du maximum et principe de comparaison). (1) *Soit u une solution de* (1.4) *comme dans le lemme 1.2. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble et $E + y = \{z \in \mathbb{R}^n,\ z = x + y$ pour un $x \in E\}$. Montrer que*

$$\inf_{E-tb} u_0(x) \le u(t,x) \le \sup_{E-tb} u_0(x) \qquad \forall (t,x) \in [0,\infty) \times E.$$

(Cette inégalité s'appelle le principe du maximum pour une équation de transport).

(2) *En déduire que si* u *et* v *sont deux solutions de* (1.4) *telles que* $u_0(x) \leq v_0(x)$ *pour tout* $x \in E$ *alors*

$$u(t,x) \leq v(t,x) \qquad \forall t \geq 0 \text{ et } x \in E + tb.$$

(Cette inégalité s'appelle le principe de comparaison pour l'équation de transport).

(3) *Soit* u *une solution de* (1.20) *comme dans la proposition 1.1. Montrer que*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} u_0(x) \leq u(t,x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u_0(x) \qquad \forall (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

(Cette inégalité s'appelle le principe du maximum pour l'équation de la chaleur).

(4) *En déduire que si* u *et* v *sont deux solutions telles que* $u_0(x) \leq v_0(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *alors*

$$u(t,x) \leq v(t,x) \qquad \forall (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

(Cette inégalité s'appelle le principe de comparaison pour l'équation de la chaleur).

Exercice 1.2 (Formule de Duhamel pour l'équation de la chaleur inhomogène). *Soit* $f \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ *telle que* f *et ses dérivées sont bornées.*

(1) *Montrer que la fonction*

$$u(t,x) = \int_0^t (K(t-s) * f(s,\cdot))(x) ds$$

est continument différentiable en temps et deux fois continument différentiable en espace.

(2) *Montrer qu'elle satisfait l'équation de la chaleur inhomogène.*

$$\partial_t u = \Delta u + f$$

(3) *Montrer que c'est la seule solution ayant ces propriétés de régularité et à croissance au plus exponentielle de cette équation.*

CHAPTER 2

Equations de transport quasi-linéaires

On qualifie de quasilinéaire une équation non linéaire dont les termes dépendent de manière linéaire en les dérivées d'ordre le plus élevé dans l'équation. Nous étudierons l'équation de transport quasilinéaire

$$u_t(t,x) + b(t,x,u(t,x)).\nabla u(t,x) = c(t,x,u(t,x)).$$

Maintenant le vecteur vitesse b du milieu et le terme de réaction c dépendent du temps t, de la position x, et de l'inconnue u. Le problème de Cauchy associé est

$$\begin{cases} u_t + b(t,x,u(t,x)).\nabla u = c(t,x,u), & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1}$$

1. Lignes caracteristiques

1.1. Équations caractéristiques. Dans le cas linéaire traité précédemment dans la sous-section 1, u était constante le long des trajectoires $(t, x+tb)$ (voir Lemme 1.1). Pour résoudre (2.1), on s'inspire de cette remarque et l'on considère une trajectoire $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$ de classe C^1. En différentiant une composition de fonctions, il vient

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t,y(t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{dy_i}{dt}(t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) \\ &= u_t(t,y) + \frac{dy}{dt}.\nabla u(t,y) \end{aligned}$$

où $\frac{dy}{dt} = (\frac{dy_1}{dt}, ..., \frac{dy_n}{dt})$. Si la trajectoire $y(t)$ satisfait

$$\frac{dy(t)}{dt} = b(t,y(t),u(t,y(t))), \tag{2.2}$$

alors en utilisant (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t,y(t)) &= u_t(t,y) + b(t,y(t),u(t)).\nabla u(t,y(t)) \\ &= c(t,y(t),u(t,y(t))). \end{aligned}$$

En posant

$$z(t) = u(t,y(t))$$

cela se réécrit sous la forme

$$\frac{dz}{dt}(t) = c(t,y(t),z(t)). \tag{2.3}$$

Les courbes $\{(t,y(t))\}_{t\in[0,T)}$ satisfaisant (2.2) sont appelées les *lignes caractéristiques* de l'équation (2.1). Ces calculs démontrent le résultat suivant.

Lemme 2.1 (Structure des equations caracteristiques). *Soit $u \in C^1([0,T) \times U)$ une solution de (2.1). Supposons que $y(t)$ est une solution de (2.2) pour $t \in [0,T)$. Alors la fonction $z(t) = u(t,y(t))$ résout (2.3) pour $t \in [0,T)$.*

1.2. Exemple dans le cas lineaire. C'est le cas où la dépendance des fonctions $b.\nabla u$ et c en l'inconnue u est linéaire, c'est-à-dire

$$b(t,x,u(t,x)) = b(t,x) \quad \text{et} \quad c(t,x,u(t,x)) = c(t,x)u(t,x).$$

L'équation de transport (2.1) est dans ce cas

$$u_t(t,x) + b(t,x).\nabla u(t,x) = c(t,x)u(t,x).$$

L'équation (2.2) pour les lignes caractéristiques $y(t)$ devient

$$\frac{dy(t)}{dt} = b(t,y(t)).$$

Remarquez que cette équation peut se resoudre sans connaître u, par application du théorème de Cauchy-Lipschitz ! L'équation (2.3) pour l'inconnue le long des trajectoires est alors

$$\frac{dz(t)}{dt} = c(t,y(t))z(t)).$$

Puisque $z(0) = u_0(y(0))$, la solution de cette équation est

$$z(t) = u_0(y(0))\exp\left(\int_0^t c(s,y(s))ds\right).$$

2. Resolution locale en espace-temps du probleme de Cauchy

Pour calculer une ligne caractéristique $y(t)$ par (2.2), on a besoin de connaître la valeur de l'inconnue $z(t) = u(t,y(t))$ le long de cette ligne. Cette dernière est solution de (2.3). En mettant (2.2) et (2.3) ensemble on obtient les *équations caractéristiques* de l'équation (2.1):

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = b(t,y(t),z(t)), \\ \frac{dz(t)}{dt} = c(t,y(t),z(t)), \\ y(0) = X, \; z(0) = u_0(X). \end{cases} \tag{2.4}$$

On constate que (2.4) est un système dit *fermé*, c'est-à-dire qu'on peut le résoudre isolément, sans autres informations sur la solution (on a pas besoin de connaître les valeurs de u ailleurs). Le Lemme suivant énonce qu'il est toujours possible de calculer les lignes caractéristiques localement autour d'un point X_0, au moins sur un petit intervalle de temps.

Lemme 2.1 (Résolution locale des équations caractéristiques). *Supposons que u_0, b et c soient des fonctions de classe C^k avec $k \geq 1$. Alors pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de $(0,X_0)$ dans $[0,\infty) \times R^n$ tel que pour tout $(t,x) \in U$, il existe un unique $X \in \mathbb{R}^n$ avec $(0,X) \in U$ tel que la solution de (2.4) existe sur $[0,t]$ et satisfait :*

$$y(t) = x,$$

et $(s,y(s)) \in U$ pour tous $s \in [0,t]$. De plus, la fonction $(t,x) \mapsto X$ est de classe C^k.

Proof. On introduit la nouvelle variable

$$a = (y,z) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

et la nouvelle fonction

$$f(t,a) = (b(t,y,z), c(t,y,z))$$

et on pose $a_0^* = (X_0, u_0(X_0))$. Alors $(y(t), z(t))$ est une solution de (2.4) si et seulement si $a(t) = (y(t), z(t))$ est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = f(t, a(t)), \\ a(0) = a_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

C'est une équation différentielle ordinaire sous sa forme la plus classique, comme vu dans tout cours de systèmes dynamiques ! La fonction f est de classe C^k. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz pour tout $a_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ il existe un temps $T > 0$ et une unique solution $a(t)$ de (2.5) sur $[0, T]$. De plus, par le théorème de régularité du flot des EDO, les solutions ont une régularité C^k en la donnée initiale. Cela signifie que, en notant $\phi(t, a_0) = a(t)$ la solution de (2.5) de donnée initiale a_0 au temps t, alors on a $\phi \in C^k([0, T] \times \mathbb{R}^n)$.

On note $\Psi : (t, X) \mapsto y(t)$ l'application qui à un temps t et une position initiale X associe la position $y(t)$ au temps t de la particule initialement en X. Le calcul de Ψ s'effectue en trois étapes. D'abord on ajoute la quantité $u_0(X)$, avec la fonction

$$\psi_1 : (t, X) \mapsto (t, X, u_0(X)).$$

Ensuite on calcule la solution $(y(t), z(t))$ de (2.4) au temps t de donnée initiale $(X, u_0(X))$. Cela revient à calculer $\phi(\psi_1(t, X))$. Enfin, on ne garde que la première composante de $(y(t), z(t))$, avec la fonction

$$\psi_2 : (y, z) \mapsto y.$$

C'est-à-dire que Ψ s'écrit comme la composition de trois fonctions

$$\Psi = \psi_2 \circ \phi \circ \psi_1 : (t, X) \mapsto y(t). \tag{2.6}$$

Puisque ϕ est de classe C^k, que ψ_1 est C^k par les hypothèses du lemme et que ψ_2 est de classe C^∞, alors Φ est de classe C^k. Notons $\Psi = (\Psi_1 ..., \Psi_n)$ les coordonnées de Ψ. Alors $\Psi_i = y_i(t)$ pour $i = 1, ..., n$. Calculons la différentielle de Ψ par rapport à la deuxième variable du couple (t, X):

$$J_X \Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial X_n} \\ \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}.$$

Puisque $y(0) = X$ pour tout X, on a que $\Psi(0, X) = X$, et donc que $\frac{\partial \Psi_i}{\partial X_i}(0, X) = 1$ et $\frac{\partial \Psi_i}{\partial X_j}(0, X) = 0$ si $i \neq j$. Ainsi,

$$J_X \Psi(0, X_0) = Id$$

On pose maintenant $\Phi(t, X) = (t, \Psi(t, X))$. Alors Φ est C^1 et par l'équation ci-dessus on a que $J\Phi$ est inversible en $(0, X_0)$. Par le Théorème d'inversion locale, il existe V un voisinage de $(0, X_0)$ tel que Φ définit un C^k difféomorphisme entre V et son image $\Phi(V)$. Il existe alors ϵ tel que $W = [0, \epsilon) \times B(X_0, \epsilon) \subset V$, et alors $U = \Phi(W)$ est un voisinage ouvert de $(0, X_0)$ dans $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Montrons finalement que U satisfait les conclusions du lemme. Soit $(t, x) \in U$. Alors il existe (t', X) tel que $\Phi(t', X) = (t, x)$. Par définition $\Phi(t', X) = (t', y(t'))$ avec y donné par la solution de (2.4) de donnée initiale $(X, u_0(X))$, et donc $t = t'$ et $y(t) = x$. Puisque Φ est un difféomorphisme, alors X est unique. De plus, $\Phi(s, X) \in U$ pour tout $s \in [0, t)$ par définition de U, et donc $(s, y(s)) \in U$ pour tout $s \in [0, t)$. Enfin, la fonction $(t, x) \mapsto (t, X)$ est égale à Φ^{-1} et est donc de classe C^k, donc $(t, x) \mapsto X$ est de classe C^k.

□

Une fois les équations caractéristiques résolues, on peut résoudre, au moins localement, l'équation de transport (2.1). Pour ce faire, on écrit

$$X = X(t,x)$$

pour X donné par le lemme 2.1. Le lemme 2.1 assure que (2.4) admet une solution $(y(s), z(s))$ sur $[0,t]$. On définit alors

$$u(t,x) = z(t, X, u_0(X)) \tag{2.7}$$

où on a noté $z(t, X, u_0(X))$ pour bien indiquer la dépendance de $z(t)$ en les conditions initiales X et $u_0(X)$.

THEOREME 2.1 (Theoreme local d'existence et unicité). *On conserve les hypothèses du lemme 2.1. Alors la fonction u définie par* (2.7) *est de classe C^k et résout*

$$u_t + b(t,x,u).\nabla u = c(t,x,u) \qquad \textit{pour } (t,x) \in U \tag{2.8}$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x)) \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que } (0,x) \in U. \tag{2.9}$$

De plus, u est l'unique telle fonction de classe C^k satisfaisant (2.8) *et* (2.9).

PROOF. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(0,x) \in U$, alors pour $t = 0$ le point X satisfaisant les conclusions du Lemme 2.1 est $X = x$. Donc par (2.7) on a $u(0,x) = z(0, x, u_0(x))$, et par la dernière égalité de (2.4) on a $z(0, x, u_0(x)) = u_0(x)$. Donc $u(0,x) = u_0(x)$ et u satisfait (2.9).

On considère maintenant le membre de gauche de (2.7) comme une fonction des variables t et X. C'est-à-dire, en utilisant la notation de la preuve du lemme 2.1 que $u(t,x) = u(\Phi(t,X))$. On différencie alors u dans les variables (t,X) par rapport à t en gardant X fixé, et l'on obtient en différentiant une composition :

$$(\frac{\partial}{\partial t} u(\Phi(t,X)))_X = (\frac{\partial \Phi_0}{\partial t})_X (\frac{\partial u}{\partial t}(t,x))_x + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial \Phi_i}{\partial t})_X (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{t,x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}(t,x).$$

Si dessus, on a utilisé la notation que $(\frac{\partial h}{\partial \alpha})_\beta$ dénote la différentiation de h par rapport à la variable α en gardant la variable β fixée. Puisque $\Phi_0 = t$ et $(\Phi_1, ..., \Phi_n) = y(t)$, on a $(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t})_X = 1$, et que par (2.4) puis (2.7)

$$(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t})_X = (\frac{\partial y_i(\cdot)}{\partial t})_X(t) = b_i(t, y(t), z(t)) = b_i(t, x, u(t,x)).$$

En combinant on obtient d'une part

$$(\frac{\partial}{\partial t} u(\Phi(t,X)))_X = u_t(t,x) + b(t,x,u(t,x)).\nabla u(t,x).$$

D'autre part, par (2.4) puis (2.7)

$$(\frac{\partial}{\partial t} u(\Phi(t,X)))_X = (\frac{\partial}{\partial t} z(t, X, u_0(X)))_X = c(t, y(t), z(t)) = c(t, x, u(t,x)).$$

Ainsi

$$u_t(t,x) + b(t,x,u(t,x)).\nabla u(t,x) = c(t,x,u(t,x))$$

et u résout (2.8).

L'unicité de u découle du Lemme 2.1 et de l'unicité des solutions de (2.4) par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

□

Remark 2.2. Le théorème 2.1 et sa preuve illustrent cette remarque fondamentale : *connaître la solution d'une équation de transport équivaut à connaître les solutions des équations caractéristiques.*

3. Resolution globale en espace du problème de Cauchy

Le théorème 2.1 démontre qu'on peut toujours résoudre l'équation de transport (2.1) près d'un point X_0 et pour des temps petits. On remarque que l'argument essentiel de la preuve est qu'à chaque instant t, les lignes caractéristiques sont un difféomorphisme. Si pour deux points différents $X \neq X'$ les lignes caractéristiques se retrouvaient toutes deux en position x à l'instant t, alors on ne pourrait plus définir u par (2.7) par manque d'unicité.

On souhaite maintenant résoudre l'équation (2.1) sur l'espace $\mathbb{R}^n$ en entier. Le point essentiel sera d'obtenir que sur un intervalle de temps uniforme $[0, T)$ il n'y a pas d'intersection des lignes caractéristiques. Pour cela nous allons utiliser le théorème d'Hadamard-Levy ci-dessous qui caractérise les C^1 difféomorphimes de $\mathbb{R}^n$.

THEOREME 2.1 (Caractérisation des C^1 difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$). *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $Jf(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$.*

On note $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x - x_0| < R\}$ la boule ouverte, $\overline{B}(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x - x_0| \leq R\}$ la boule fermée et $\partial B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x - x_0| = R\}$ la sphère.

PROOF. Implication directe. Sa preuve est simple et est laissée au lecteur.

Implication indirecte. On se fixe une fonction $f \in C^1$ avec Jf partout inversible et $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$.

Étape 1. *Condition suffisante pour l'existence d'un antécédent.* Soient $x_0, y \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$. Nous affirmons que si $\min_{x\in\partial B(x_0,R)} |f(x) - y| > |f(x_0) - y|$ alors il existe $x \in B(x_0, R)$ tel que $f(x) = y$.

En effet, la fonction $x \mapsto |f(x) - y|$ est continue sur $\overline{B}(x_0, R)$ et on note $\nu \geq 0$ son minimum atteint en un point x^*. Par hypothèse, $x^* \in B(x_0, R)$. Supposons par l'absurde que $\nu > 0$. Comme $Jf(x^*)$ est inversible, par le théorème d'inversion locale, pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si $y' \in B(f(x^*), \epsilon)$, il existe $x' \in B(x^*, \delta)$ tel que $f(x') = y'$. Comme $|f(x^*) - y| > 0$, on peut choisir $y' \in B(f(x^*), \epsilon)$ tel que $|y' - y| < |f(x^*) - y|$. Pour δ assez petit on a alors $x' \in B(x_0, R)$ et $|f(x') - y| < \nu$, ce qui contredit la définition de ν.

Étape 2. *Surjectivité.* Montrons que f est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Comme $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$, on peut appliquer le résultat de l'étape 1 pour $x_0 = 0$ et $R > 0$ assez grand, et il existe effectivement x tel que $f(x) = y$.

Étape 3. *Preuve dans le cas C^2.* Montrons que si $f \in C^2$ alors f est un C^1 difféomorphisme. Par l'étape 2 il suffit de montrer que f est injective.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$, alors il faut démontrer que l'ensemble S où l'application $g : x \mapsto y - x$ s'annule est un singleton. Notons que $Jg = -Jf$. Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \qquad \text{avec} \quad F(x) = -(Jg(x))^{-1} g(x). \tag{2.10}$$

Comme f est C^2, alors F est C^1 et le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale $x(t)$.

En n'importe quel point $\overline{x} \in S$, la linéarisation de (2.10) est :

$$Jf(\overline{x})(u) = -(Jg(x^*))^{-1} Jg(x^*)(u) - \left[J(Jg^{-1})(x^*) Jg(x^*)(u)\right] g(x) = -Id$$

car $g(\overline{x}) = 0$. Donc $\overline{x}$ est un équilibre stable de (2.10).

Soit $x(t)$ une solution quelconque de (2.10) et soit $y(t) = g(x(t))$. Alors

$$y'(t) = Jg(x(t))\left[x'(t)\right] = Jg(x(t))\left[-(Jg(x))^{-1}g(x)\right] = -y(t).$$

Donc tant que $x(t)$ existe, on a

$$g(x(t)) = y(t) = e^{-t}g(x_0) \tag{2.11}$$

Puisqu'ainsi la fonction $g(x(t))$ est bornée, et comme $\lim_{|x|\to\infty}|g(x)| = \infty$, on déduit que $x(t)$ est bornée. Par le lemme des bouts, la solution maximale $x(t)$ de (2.10) est globale en temps. Soit

$$\omega(x_0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n,\ \text{tel qu'il existe } t_n \to \infty \text{ avec } \lim_{n\to\infty} x(t_n) = x^*\}$$

l'ensemble ω-limite. Il contient au moins un point x^* car $x(t)$ est bornée. Par (2.11) on a $\lim_{t\to\infty} g(x(t_n)) = 0$, et donc $g(x^*) = 0$ par continuité. Donc $x^* \in S$. Puisque $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = x^*$, et que tous les points de S sont des équilibres stables, $\lim_{x\to\infty} x(t) \to x^*$. Donc $\omega(x_0)$ ne contient que le point x^*, que l'on notera $x^*(x_0)$.

Pour $\overline{x} \in S$ on pose $E_{\overline{x}} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n,\ x^*(x_0) = \overline{x}\}$ le bassin d'attraction de $\overline{x}$. Les ensembles $E_{\overline{x}}$ et $E_{\overline{x}'}$ sont disjoints si $\overline{x} = \overline{x}'$. Par continuité du flot de (2.10), et car $\overline{x}$ est un équilibre stable, chaque $E_{\overline{x}}$ est ouvert. De plus, $\mathbb{R}^n = \cup_{\overline{x}\in S} E_{\overline{x}}$. Ces ensembles définissent donc une partition de $\mathbb{R}^n$ en ensembles ouverts, et par connexité, il ne peut y avoir qu'un seul tel ensemble, et donc qu'un seul $\overline{x} \in S$.

Étape 4. *Stabilité par passage à la limite.* Montrons que s'il existe f_n une suite de C^1 difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ telle que $\|f - f_n\|_{L^\infty} + \|Jf - Jf_n\|_{L^\infty} \to 0$ alors f est également un C^1 difféomorphisme. Par l'étape 2, il suffit de montrer que f est injective.

Supposons par contradiction qu'il existe $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Soit $\epsilon > 0$. Comme $Jf(x_1)$ est inversible, $\kappa = \inf_{|v|=1}|Jf(x_1)v| > 0$. Pour $x \in \partial B(x_1, \epsilon)$ on écrit $x = x_1 + \epsilon v$ avec v un vecteur unitaire, et alors par expansion de Taylor $f(x) = y + \epsilon Jf(x_1)v + o_{\epsilon\to 0}(\epsilon)$. Donc $|f(x) - y| > \kappa\epsilon/2$ pour ϵ assez petit. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - y| - |f_n(x_1) - y| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - y| - |f_n(x_1) - f(x_1)| \\
&\geq |f(x) - y| - |f_n(x) - f(x)| - |f_n(x_1) - f(x_1)| \\
&\geq \kappa\epsilon/2 - 2\|f_n - f\|_{L^\infty} \ > 0
\end{aligned}$$

pour n assez grand. En appliquant le résultat de l'étape 1 à f_n, il existe $x_{1,n} \in B(x_1, \epsilon)$ tel que $f_n(x_{1,n}) = y$. En faisant le même raisonnement en x_2, il existe $x_{2,n} \in B(x_1, \epsilon)$ tel que $f_n(x_{2,n}) = y$. Donc f_n n'est pas injective ce qui est absurde.

Étape 5. *Fin de la preuve par argument de densité.* Nous affirmons qu'il existe f_n une suite de fonctions C^2 avec Jf_n partout inversible, telles que $\|f - f_n\|_{L^\infty} + \|Jf - Jf_n\|_{L^\infty} \to 0$. Comme $\lim_{|x|\to\infty}|f(x)| = \infty$ alors $\lim_{|x|\to\infty}|f_n(x)| = \infty$. Donc par l'étape 3, f_n est un C^1 difféomorphisme, et par l'étape 4, f est alors aussi un C^1 difféomorphisme ce qui conclut la preuve de l'implication indirecte.

Il reste à démontrer l'affirmation. Soit $\epsilon > 0$. Soit $0 = r_0 < r_1 < ... < r_k \to \infty$. Remarquons qu l'on peut écrire $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ avec $f_k \in C^1$ qui a son support dans l'ensemble $\{r_{k-1} < |x| < r_{k+1}\}$. Il y a donc au plus 2 termes non nuls dans la somme. Pour tout k, par densité des fonctions $C^2(B(0, r_{k+1}))$ dans $C^1(B(0, r_{k+1}))$, il existe toujours g_k telle que $\|f_k - g_k\|_{L^\infty} < \epsilon/2$ et $\|Jf_k - Jg_k\|_{L^\infty} < \epsilon/2$, et on peut supposer de plus que g_k a son support dans l'ensemble $\{r_{k-1} < |x| < r_{k+1}\}$. Soit $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, où il y a au plus 2 termes non nuls dans la somme. Alors $g \in C^2$ et $\|f - g\|_{L^\infty} < \epsilon$ et $\|Jf - Jg\|_{L^\infty} < \epsilon$ par la propriété des supports. D'où l'affirmation.

□

On peut alors résoudre (2.1) sous des hypothèses sur b, c et u_0 qui empècheront l'intersection des lignes caractéristiques en temps court. Par le théorème 2.1, il faudra vérifier que les lignes caractéristiques débutant loin restent loin, et que la différentielle des lignes caractéristiques reste inversible.

THEOREME 2.2 (Resolution du problème de Cauchy sur l'espace entier). *On suppose que $b, c \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^{1+n})$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et que les différentielles de b, c et u_0 sont bornées. Alors il existe $T > 0$ et une unique solution $u \in C^1([0,T) \times \mathbb{R}^n)$ de* (2.1).

Si de plus b, c, et u_0 sont de classe C^k pour un $k \geq 2$, alors $u \in C^k([0,T) \times \mathbb{R}^n)$.

PROOF. Leurs différentielles étant bornées, il existe $M > 0$ tel que $|Jb|, |Jc|, |Ju_0| \leq M$ où $|A| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$. On a alors

$$|b(t,x,u)| + |c(t,x,u)| \leq M + M(|x| + |u|) \quad \text{et} \quad |u_0(x)| \leq M + M|x| \tag{2.12}$$

pour $0 \leq t < 1$, quitte à prendre M plus grand. Dans la suite, C désignera une constante indépendante des autres constantes en jeu, qui pourra varier d'une ligne à l'autre. On garde les notations de la preuve du Lemme 2.1, pour a, f, ϕ, Ψ, ψ_1 et ψ_2. On écrit $\Psi_t(x) = \Psi(t,x)$ et $\phi_t(x) = \phi(t,x)$. Puisque $f = (b,c)$:

$$|f(a)| \leq C(M + M|a|) \quad \text{et} \quad |Jf| \leq CM. \tag{2.13}$$

Étape 1. *Estimation sur les lignes caractéristiques.* On considère les solutions des équations caractéristiques (2.4)-(2.5) (données par Cauchy-Lipschitz). On affirme qu'elles sont globales en temps, et qu'il existe $T > 0$ tel que pour $t \in [0,T)$:

$$\frac{1}{2}|X| - 1 \leq |y(t,X)| \leq 2|X| + 1 \tag{2.14}$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Pour le démontrer, on intègre (2.5) :

$$a(t) = a_0 + \tilde{a}(t), \qquad \tilde{a}(t) = \int_0^t f(s, a(s))ds. \tag{2.15}$$

On obtient par (2.13) :

$$|a(t)| \leq |a_0| + \int_0^t |f(s,a(s))|ds \leq |a_0| + \int_0^t C(M + M|a(s)|)ds.$$

Par application du lemme de Gronwall, cela implique

$$|a(t)| \leq (1 + |a_0|)e^{CMt}. \tag{2.16}$$

Puisque a est la solution maximale de (2.5) avec $f \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^{2n})$ et que a reste bornée sur tout intervalle de temps par (2.16), par application du Lemme des bouts, a existe pour tout temps $t \geq 0$. Soit $\epsilon > 0$. En injectant (2.16) dans (2.15) on obtient que pour t petit :

$$a(t) = a_0 + \tilde{a}(t), \qquad |\tilde{a}(t)| \leq \epsilon + \epsilon|a_0|$$

où l'on a utilisé $|\tilde{a}(t)| \leq C\int_0^t (M + M(1 + |a_0|)e^{CMs})ds$ par (2.12) et (2.16), et pris $t < T(M,\epsilon)$ petit. Donc on a $|a - a_0| \leq \epsilon + \epsilon|a_0|$. Puisque $a = (y,z)$ et $y(0) = X$, alors $|y - X| \leq \epsilon + 2\epsilon|a_0|$. Puisque $a_0 = (X, u_0(X))$, on a $|a_0| \leq C + CM|X|$ par (2.12), et donc $|y - X| \leq C\epsilon(1 + M|X|)$. Cela implique (2.14) pour ϵ assez petit.

Étape 2. *Invertibilité de la différentielle des lignes caractéristiques.* Nous montrons maintenant qu'il existe $T(M) > 0$ tel que pour tout $t \in [0,T)$, la différentielle de $\Psi_t = y(t,\cdot)$ est inversible en tout point.

Nous rappelons que ϕ_t désigne le flot de la solution de (2.5). On a donc $\phi_0(a_0) = a_0$ et $\partial_t\phi_t(a_0) = f(t, \phi_t(a_0))$. On note J_a la différentielle en la variable a. En différentiant on obtient

$$\partial_t J_a\phi_t(a_0) = J_a f(t, \phi_t(a_0)) J_a\phi_t(a_0). \tag{2.17}$$

Puisque $\phi_0(a_0) = a_0$, on a $J_a\phi_t(a_0) = Id$, et donc en intégrant :

$$J_a\phi_t(a_0) = Id + \tilde{A}, \qquad \tilde{A} = \int_0^t J_a f(s, \phi_s(a_0)) J_a\phi_s(a_0) ds. \tag{2.18}$$

En utilisant (2.13) :

$$|J_a\phi_t(a_0)| \leq 1 + \int_0^t CM |J_a\phi_s(a_0)| ds.$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient $|J_a\phi_t(a_0)| \leq e^{CMt}$. Soit $\epsilon > 0$. En injectant dans (2.18) il vient pour t est assez petit $t < T(M, \epsilon)$

$$J_a\phi_t = Id + \tilde{A}, \qquad \tilde{A} = \int_0^t J_a f(s, \phi_s(a_0)) J_a\phi_s(a_0) ds, \qquad |\tilde{A}| \leq \epsilon$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé $|\tilde{A}| \leq \int_0^t CMe^{CMs} ds$. On rappelle par (2.6) que $\Psi = \psi_2 \circ \phi \circ \psi_1$. Donc la différentielle de Ψ_t est

$$J_X\Psi_t = \begin{pmatrix} Id & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} J_a\phi_t \begin{pmatrix} Id & (0) \\ (0) & Ju_0 \end{pmatrix}$$

En utilisant (2.18) on obtient

$$J_X\Psi_t = Id + \tilde{B}, \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} Id & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} Id & (0) \\ (0) & Ju_0 \end{pmatrix}, \qquad |\tilde{B}| \leq CM\epsilon,$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé que $|\tilde{A}| \leq \epsilon$ et $|Ju_0| \leq M$. Donc $J_X\Psi_t$ est bien inversible en tout point si ϵ est assez petit.

Étape 3. *Obtention de la solution.* En combinant les étapes 1 et 2, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T)$, l'application Ψ_t est C^1, avec $\lim_{|X|\to\infty} |\Psi_t(X)| = \lim_{|X|\to\infty} |y(t, X)| = \infty$ par (2.14), et avec $J\Psi_t(X)$ inversible pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Par le théorème 2.1, Ψ_t est donc un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Puisque Ψ_t est une bijection, pour tout $t \in [0, T)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $y(t, X) = \Psi_t(X) = x$. On définit alors u comme dans la section précédente par la formule (2.7). En répétant exactement la preuve du théorème (2.1), on obtient que u est bien une solution de (2.1). L'unicité découle alors du Lemme 2.1 et de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations caractéristiques (2.4).

□

Remark 2.3. Les théorèmes 2.2 et 2.1 peuvent se généraliser à d'autres contextes. Il s'adaptent très naturellement pour résoudre l'équation pour des temps négatifs. Ils s'adaptent également si l'on veut spécifier la condition au bord u_0 sur une hypersurface autre que $\{t = 0\}$.

Les hypothèses de régularités dans le théorème 2.2 sont en un certain sens optimales. Si b, c, u_0 ne les satisfont pas, il faudra adapter la preuve et s'assurer que les lignes caractéristiques ne s'intersectent pas.

4. Exercices

EXERCICE 2.1. *On considère*

$$\begin{cases} u_t + b.\nabla u_x = f, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.19}$$

où $b \in \mathbb{R}^n$ est constant, et $f = f(t,x)$.

- *Écrire les équations caractéristiques associées à (2.19).*
- *Résoudre ces équations caractéristiques pour trouver la solution u de (2.19). Assurez-vous que votre réponse coincide avec la formule (1.7) du premier chapitre.*

EXERCICE 2.2 (Pris du Evans). *Résoudre en utilisant la méthode des équations caractéristiques*

$$\begin{cases} u_t + \frac{x}{1+t} u_x = 2u, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \cos(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u, & (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \\ u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 1, & (t,x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(y,y) = 2y, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour cette dernière équation, les lignes caractéristiques se croisent en un point. Lequel ?

EXERCICE 2.3 (Transport linéaire 1D). *On considère l'équation de transport linéaire*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x) = 0, & t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.20}$$

On fait les hypothèses que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que b et $\frac{d}{dx}b$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $X \in \mathbb{R}$ on note $y(t,X)$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t y(t,X) = b(y(t,X)), \\ y(0,X) = X. \end{cases} \tag{2.21}$$

(1) *Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}$, la solution $y(\cdot,X)$ de (2.21) est globale en temps. Montrer que pour tout $t \geq 0$, l'application $X \mapsto y(t,X)$ est un C^1 difféomorphisme sur $\mathbb{R}$.*
(2) *On pose pour $t \geq 0$ l'application $y^{-1}(t,x)$ qui est l'inverse de $X \mapsto y(t,X)$, i.e. $y(t,y^{-1}(t,x)) = x$. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$ de (2.20) qui s'écrit*

$$u(t,x) = u_0(y^{-1}(t,x)). \tag{2.22}$$

(3) *Soient u et $\tilde{u}$ deux solutions données par (2.22), de données initiales $u_0, \tilde{u}_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $X_1 < X_2$ tels que $u_0(x) \leq \tilde{u}_0(x)$ pour tout $X_1 \leq x \leq X_2$. Montrer que*

$$u(t,x) \leq \tilde{u}(t,x) \qquad \text{pour tout } y(t,X_1) < x < y(t,X_2). \tag{2.23}$$

EXERCICE 2.4 (Comportement en temps long de transport linéaire). *On garde les hypothèses et notations de l'exercice précédent. On suppose de plus les hypothèses* *suivantes,*

$$b \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),$$
Il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}$ *tel que* $b(x^*) = 0$,
$$c^* := \frac{d}{dx} b(x^*) > 0.$$

(1) *Montrer que pour tout* $X > x^*$ *on a* $y(t, X) \to \infty$ *lorsque* $t \to \infty$, *et que pour tout* $X < x^*$ *on a* $y(t, x) \to -\infty$ *lorsque* $t \to \infty$.

(2) *On pose* $g(x) = \frac{1}{b(x)} - \frac{1}{c^*(x-x^*)}$. *On pose pour* $i \in \mathbb{N}$
$$\varphi_i(x) = (x - x^*)^i \exp\left(ic^* \int_{x^*}^{x} g(x')dx' \right) \qquad \textit{et} \qquad \lambda_i = ic^*.$$
Montrer que $e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)$ *est une solution de* (2.20), *i.e.*
$$\partial_t(e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)) + b(x)\partial_x(e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)) = 0.$$

(3) *On suppose que* v *est une solution de* (2.20) *telle qu'il existe* $N > 0$, $\epsilon > 0$ *et* $i \geq 2$ *tels que* $|v_0(x)| \leq N|\varphi_i(x)|$ *pour tous* $x \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$. *En vous aidant de la question (4) de l'exercice précédent, et de la question (1) de cet exercice, montrer que pour tout* $R > 0$ *il existe* $C > 0$ *tel que*
$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty([-R,R])} \leq Ce^{-\lambda_i t} \qquad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

(4) *On suppose qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *et* $i \geq 1$ *tels que* $u_0(x) = c(x - x^*)^i + O(|x - x^*|^{i+1})$ *lorsque* $x \to x^*$. *On pose* $v_0 = u_0 - c\varphi_i$ *et* v *la solution de* (2.20) *correspondante. Montrer que l'on a la décomposition*
$$u(t, x) = ce^{-\lambda_i t}\varphi_i(x) + v(t, x)$$
avec v *qui satisfait pour tout* $R > 0$ *qu'il existe* $C' > 0$ *tel que*
$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty([-R,R])} \leq Ce^{-\lambda_{i+1} t}.$$

(5) *Montrer le résultat suivant :*
Résultat *: pour toute fonction* u_0 *analytique sur* $\mathbb{R}$, *il existe* $c \neq 0$ *et* $i \in \mathbb{N}$ *tels que l'unique solution* $u \in \mathcal{C}^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$ *de* (2.20) *s'écrit*
$$u(t, x) = ce^{-\lambda_i t}\varphi_i(x) + v(t, x)$$
où v *satisfait*
$$\textit{pour tout } R > 0, \qquad \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t}\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty([-R,R])} = 0.$$

CHAPTER 3

Solutions classiques de l'équation de Burgers non visqueuse

L'équation de Burgers (parfois appelée équation de Hopf) est l'exemple le plus simple d'équation de transport quasilinéaire

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & \text{pour } t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Cette équation aux dérivées partielles n'a pas d'application physique directe, mais c'est un prototype d'une classe d'EDP appelée systèmes hyperboliques de lois de conservation. De telles équations apparaissent naturellement en mécanique des fluides ou en elasticité.

Nous allons traiter cet exemple en détail, mais rappelez-vous que ce n'est pas un simple cas particulier. Tout ce que nous allons pouvoir dire sur les solutions peut être transposé à d'autres équations. Le fait de se restreindre à (3.1) va nous permettre de comprendre en détail certains phénomènes généraux, en limitant certains aspects mathématiques techniques.

1. Résolution locale en temps du problème de Cauchy

Le Théorme 2.2 du chapitre précédent s'applique à (3.1) et donne l'existence de solutions de (3.1). On va maintenant faire mieux et être capable de déterminer exactement le temps maximal d'existence de ces solutions !

Pour l'équation (3.1), les équations caractéristiques (2.4) s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = z(t), \\ \frac{dz}{dt}(t) = 0, \\ y(0) = X, \quad z(0) = u_0(X). \end{cases} \tag{3.2}$$

La solution de (3.2) se calcule explicitement par

$$y(t) = X + tu_0(X), \tag{3.3}$$

$$z(t) = u_0(X). \tag{3.4}$$

On note alors $y(t,X) = X + tu_0(X)$ pour insister sur la dépendance en la donnée initiale. On constate que $\frac{\partial y}{\partial X}(t,X) = 1 + t\frac{du_0}{dx}(X)$. On en déduit que tant que $0 \leq t < T$ où

$$T = \begin{cases} \infty & \text{si } \frac{du_0}{dx}(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{1}{-\inf \frac{du_0}{dx}(x)} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.5}$$

alors $\frac{\partial y}{\partial X}(t,X) \neq 0$ en tout point X. Cela implique que l'application $X \mapsto y(t,X)$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$. En d'autre termes, les lignes caractéristiques définissent pour tout temps $t \in [0, T)$ un changement de variable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut donc définir

$$X(t,x) \text{ est l'unique reel tel que } y(t, X(t,x)) = x. \tag{3.6}$$

THEOREME 3.1. *Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\|\frac{du_0}{dx}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$. Alors il existe une unique solution $u \in C^1([0,T) \times \mathbb{R})$ de* (3.1) *où T est donné par* (3.5)*. Celle-ci est de plus donnée par*

$$u(t,x) = u_0(X(t,x)) \tag{3.7}$$

où X est donné par (3.6).

PROOF. Puisque $\|\frac{du_0}{dx}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ alors T donné par (3.5) est bien défini. De plus, $X(t,x)$ donné par (3.6) est une application de classe $C^1([0,T) \times \mathbb{R})$. Donc u donnée par (3.7) est une fonction de classe C^1.

Pour $t = 0$ on a par (3.3) $y(0, X) = X$, et donc que $X(0,x) = x$ par (3.6). Donc en utilisant (3.7) $u(0,x) = u_0(x)$.

En outre, on a par (3.3) que $y(t+s, X) = X + (t+s)u_0(X)$. En utilisant (3.7) cela donne $y(t+s, X(t,x)) = X(t,x) + (t+s)u(t,x)$. Donc par (3.6) on obtient $X(t+s, X + (t+s)u(t,x)) = X(t,x)$. En injectant à nouveau dans (3.7) cela implique que :

$$u(t+s, x + su(t,x)) = u(t,x).$$

Cela n'est rien autre que le fait que u est constante le long des caractéristiques. En différentiant par rapport à s l'égalité ci-dessus au temps $s = 0$ il vient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0.$$

Donc u résout bien (3.1).

L'unicité découle du Lemme 2.1 de structure pour les équations caractéristiques, et de l'unicité des solutions des solutions de (3.2) par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

$\square$

La solution donnée par le théorème 3.1 est maximale. En effet, si $T < \infty$ alors il n'existe pas de solutions sur un intervalle plus grand que $[0, T)$. C'est parce que u devient alors singulière à mesure que $t \uparrow T$.

PROPOSITION 3.1 (Formation de singularité). *Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\|\frac{du_0}{dx}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ et telle que $\frac{du_0}{dx}$ prenne une valeur négative en au moins un point. Alors la solution u donnée par le théorème 3.1 devient singulière lorsque $t \uparrow T$ au sens où*

$$\lim_{t \uparrow T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \infty. \tag{3.8}$$

De plus, il n'existe pas de prolongement régulier de u au delà de T. Cela signifie qu'il n'existe pas de $T' > T$ et de fonctions $v \in C^1([0,T') \times \mathbb{R})$ telle que v résout (3.1) *sur* $[0, T') \times \mathbb{R}$.

PROOF. Les deux résultats de la proposition sont liés, mais nous les montrerons par deux méthodes différentes.

Preuve de (3.8). On va montrer (3.8) en utilisant que le changement de variable associé au lignes caractéristiques devient singulier. En effet, montrerons d'abord qu'il existe $c > 0$ et, pour tout $t \in [0, T)$ un réel $X^*(t) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\partial y}{\partial X}(t, X^*(t)) \underset{t \uparrow T}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{du_0}{dx}(X^*(t)) < -c. \tag{3.9}$$

Pour ce faire, notons que y donné par (3.3) satisfait pour $t \in [0,T)$:

$$\frac{\partial y}{\partial X}(t,X) = 1 + t\frac{du_0}{dx}(X) > 0. \tag{3.10}$$

Soit $\epsilon(t)$ n'importe quelle fonction telle que $\frac{1}{2T} > \epsilon(t) > 0$ et $\epsilon(t) \to 0$ quand $t \uparrow T$. Pour tout t, il existe $X^*(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{du_0}{dx}(X^*(t)) < \inf \frac{du_0}{dx} + \epsilon(t)$. Comme $T = \frac{1}{-\inf \frac{du_0}{dx}}$ cela donne $\frac{du_0}{dx}(X^*(t)) < -\frac{1}{T} + \epsilon(t)$. Donc $\frac{du_0}{dx}(X^*(t)) < -\frac{1}{2T}$ et

$$0 < \frac{\partial y}{\partial X}(t, X^*(t)) < 1 - \frac{t}{T} + t\epsilon(t) \underset{t\uparrow T}{\longrightarrow} 0$$

par (3.10). Cela démontre (3.9).

Ensuite, puisque $y(t, x(X(t,x))) = x$ on a que pour tout $t < T$, la fonction $x \mapsto X(t,x)$ est la fonction inverse de $X \mapsto y(t,x)$. Donc en utilisant la dérivée d'une fonction inverse puis (3.10)

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial t}(t, X(t,x))} = \frac{1}{1 + t\frac{du_0}{dx}(X(t,x))}.$$

On pose maintenant $x^* = y(t, X^*(t))$. Alors par (3.9) on a

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t, x^*(t)) \underset{t\uparrow T}{\longrightarrow} \infty. \tag{3.11}$$

En d'autres terms, lorsque le changement de variables $X \mapsto y(t,X)$ devient plat par (3.9), le changement de variable inverse $x \mapsto X(t,x)$ se raidit par (3.11). Comme $u(t,x) = u_0(X(t,x))$ par (3.7), en différentiant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\frac{du_0}{dx}(X(t,x)).$$

En utilisant la deuxième inégalité de (3.9), et (3.11), on a $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x^*(t)) \to -\infty$. Cela montre (3.8).

Preuve de l'absence de continuation après T. Supposons par l'absurde qu'il existe $T' > T$ et une solution $v \in C^1([0,T') \times \mathbb{R})$ telle que v résout (3.1) sur $[0,T') \times \mathbb{R}$. En différentiant (3.1) on a

$$v_{xt} + vv_x = -(v_x)^2. \tag{3.12}$$

On reconnaît que le membre de gauche est la dérivée directionnelle le long des lignes caractéristiques. Soit $X \in \mathbb{R}$ et $y(t) = X + tu_0(X)$ une ligne caractéristique, de sorte que $v(t, y(t)) = u_0(X)$ par (3.4). On pose alors $\tilde{z} = v_x(t, y(t))$. On a en utilisant $\frac{dy}{dt}(t) = v(t, y(t))$ et (3.12) que

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = -\tilde{z}^2.$$

La solution de cette équation différentielle, dite de Ricatti, est explicite :

$$\tilde{z}(t) = \frac{\tilde{z}(0)}{1 + \tilde{z}(0)t}.$$

Comme $\tilde{z}(0) = v_x(0,X) = \frac{du_0}{dx}(X)$ on a alors obtenu la formule suivante :

$$v_x(t,x) = \frac{\frac{du_0}{dx}(X(t,x))}{1 + \frac{du_0}{dx}(X(t,x))t}.$$

Soit $T^* \in (T, T')$. Puisque $\inf \frac{du_0}{dx} = -\frac{1}{T}$ et $T' > T$, il existe X^* tel que $\frac{du_0}{dx}(X^*) = -\frac{1}{T^*}$. Alors on a le long de la ligne caractéristique $y(t, X^*)$

$$v_x(t, y(t, X^*)) = \frac{-\frac{1}{T^*}}{1 - \frac{t}{T^*}} = \frac{-1}{T^* - t} \underset{t \uparrow T^*}{\longrightarrow} -\infty.$$

Donc v n'est pas C^1 sur $[0, T') \times \mathbb{R}$ d'où la contradiction.

$\square$

2. Symétries et solutions auto-similaires

Soit une solution u correspondant à la proposition (3.1). Alors u va devenir singulière lorsque $t \uparrow T$. Nous allons découvrir maintenant que la forme que prend u près d'une singularité est en fait universelle : elle ne dépend quasiment plus de la donnée initiale ! C'est un fait remarquable qui se produit pour de nombreuses autres équations.

La raison première est que l'équation reste la même à deux endroits différents, et à des échelles différentes. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.1 (Symétries). *Si $u \in C^1([0, T) \times \mathbb{R})$ est une solution de (3.1), alors pour tout $(\lambda, \mu, t_0, x_0, c) \in (0, \infty)^2 \times \mathbb{R}^3$ alors*

$$\frac{\mu}{\lambda} u \left(\frac{t - t_0}{\lambda}, \frac{x - x_0 - ct}{\mu} \right) + c$$

est aussi une solution de (3.1), sur $[t_0, t_0 + T) \times \mathbb{R}$.

Remark 3.1 (Action du groupe de symétries)**.** On peut vérifier que $G = (0, \infty)^2 \times \mathbb{R}^3$ muni de la loi de composition

$$(\lambda', \mu', t_0', x_0', c').(\lambda, \mu, t_0, x_0, c) = (\lambda'\lambda, \mu'\mu, t_0' + \lambda' t_0, x_0' + \mu' x_0 - \frac{\mu'}{\lambda'} t_0' c, c' + \frac{\mu'}{\lambda'} c)$$

est un groupe, d'élément neutre $(1, 1, 0, 0, 0)$. A chaque élément $g = (\lambda, \mu, t_0, x_0, c) \in G$ on associe l'application sur l'ensemble des fonctions $\Phi_g : (u \mapsto \frac{\mu}{\lambda} u \left(\frac{t - t_0}{\lambda}, \frac{x - x_0 - ct}{\mu} \right) + c)$. Alors le lemme 3.1 montre que ceci définit une action du groupe G sur l'ensemble des fonctions, qui laisse le sous-ensemble des solutions de (3.1) invariant.

C'est pourquoi on parle en général de groupe de symétries. Gardez à l'esprit que pour une EDP, le fait que l'ensemble des solutions soit invariant sous l'action d'un groupe de symétries est une contrainte très forte ! Considérons une EDP d'évolution comme un système dynamique sur l'ensemble des fonctions. Et donc l'ensemble des fonctions comme étant l'espace des phases pour ce système dynamique. Alors cela signifie qu'en deux endroits de l'espace des phases différents, mais dont l'un est obtenu par l'action d'un élément g à l'autre, les trajectoires du système dynamique sont les mêmes ! C'est pourquoi la présence de symétrie va souvent impliquer de la *rigidité* pour la dynamique : seuls quelques comportements peuvent apparaître, les trajectoires ne sont pas chaotiques. C'est ce que nous allons voir dans le théorème 3.1 : l'ensemble des singularités que l'équation de Burgers peut former est en fait restreint.

Proof. Invariance galiléenne. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $v(t, x) = u(t, x - ct) + c$. Alors $v_t(t, x) = u_t(t, x - ct) - cu_x(t, x - ct)$ et $v_x = u_x(t, x - ct)$. Donc

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= u_t(t, x - ct) - cu_x(t, x - ct) + (u(t, x - ct) + c)u_x(t, x - ct) \\ &= u_t(t, x - ct) + u(t, x - ct)u_x(t, x - ct) \ = 0 \end{aligned}$$

car $u_t + uu_x = 0$ et donc v résout (3.1). On remarque que v correspond à la solution u que l'on observerait depuis un nouveau référentiel se déplaçant à vitesse constante $-c$ par rapport au référentiel original.

Invariance par changement d'échelle temporelle. Soit $\lambda > 0$ et $v(t,x) = \lambda^{-1}u(t/\lambda, x)$. Alors

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= \frac{1}{\lambda^2}u_t(\frac{t}{\lambda}, x) + \frac{1}{\lambda}u(\frac{t}{\lambda}, x)\frac{1}{\lambda}u_x(\frac{t}{\lambda}, x) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\left(u_t(\frac{t}{\lambda}, x) + u(\frac{t}{\lambda}, x)u_x(\frac{t}{\lambda}, x)\right) = 0 \end{aligned}$$

et donc v résout (3.1). On remarque que l'instant $t = 1$ pour u correspond à l'instant $t = \lambda$ pour v. Ainsi, v correspond à la solution u que l'on observerait avec une autre échelle de temps, dont la nouvelle unité correspondrait à $1/\lambda$ pour l'échelle de temps originale.

Invariance par changement d'échelle spatiale. On va cette fois-ci donner une preuve différente utilisant l'analyse dimensionnelle. Changeons d'unité de mesure pour les longueurs. Prenons une nouvelle unité de longueur correspondant à $1/\mu$ fois l'unité de longueur précédente. Alors la vitesse, étant proportionnelle à une longueur divisée par un temps, a son unité de mesure correspondant également à $1/\mu$ fois l'unité de vitesse précédente. Donc une vitesse $u(t,x)$ correspond à une vitesse $\mu v(t, \frac{x}{\mu})$ dans le nouveau système de mesure. On vérifie effectivement que v est une solution car

$$v_t + vv_x = \mu u_t(t, \frac{x}{\mu}) + \mu u(t, \frac{x}{\mu})u_x(t, \frac{x}{\mu}) = \mu\left(u_t(t, \frac{x}{\mu}) + u(t, \frac{x}{\mu})u_x(t, \frac{x}{\mu})\right) = 0$$

Invariance par changement d'origine du référentiel. L'invariance par rapport à la transformation $t \mapsto t - t_0$ et $x \mapsto x - x_0$ se démontre de la même manière. En combinant toutes ces invariances, on obtient le résultat du lemme.

$\square$

Intuitivement, une conséquence de l'invariance par changement d'échelle spatiale de l'équation est la suivante. Supposons qu'après un certain temps, une solution se soit concentrée sur une échelle spatiale plus petite, et ce en gardant la même forme qu'au temps initial. Alors, à nouveau, le même phénomène doit se reproduire : la solution va se concentrer sur une échelle encore plus petite, et toujours en gardant la même forme. Et ainsi de suite, la solution va donc se concentrer sur des échelles de plus en plus petites. Cela nous amène à considérer des solutions qui s'écriraient

$$u(t,x) = (T-t)^\alpha \Psi\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right).$$

Celles-ci gardent la même forme Ψ, en étant concentrées spatiallement à l'échelle $(T-t)^\beta$. Cette échelle tend vers 0 lorsque $t \uparrow T$, et donc u devient singulière à mesure que $t \uparrow T$. Une telle fonction u est appelée *solution auto-similaire rétrograde*. La fonction Ψ est appelée *profil*, et les paramètres α et β les *exposants d'échelle*. Si Ψ est C^1 alors

$$\begin{aligned} u_t &= -\alpha(T-t)^{\alpha-1}\Psi\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right) + (T-t)^{\alpha-\beta-1}x\Psi'\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right), \\ u_x &= (T-t)^{\alpha-\beta}\Psi'\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right). \end{aligned}$$

et ainsi u est une solution de l'équation de Burgers (3.1) si et seulement si

$$\begin{aligned}-\alpha(T-t)^{\alpha-1}\Psi\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right)+(T-t)^{\alpha-\beta-1}x\Psi'\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right)\\+(T-t)^{2\alpha-\beta}\Psi'\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right)\Psi\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right)\quad&=0\end{aligned}$$

Si $\alpha\neq\beta-1$, alors pour que cette équation soit vérifiée pour tous $t<T$ et

$$\mathcal{X}=\frac{x}{(T-t)^\beta}\tag{3.13}$$

on constate qu'il faut $\Psi=0$, ce qui est inintéressant car donnant la solution $u=0$. On choisit donc $\alpha=\beta-1$, et cette équation est équivalente à avoir :

$$(1-\beta)\Psi(\mathcal{X})+(\beta\mathcal{X}+\Psi(\mathcal{X}))\Psi'(\mathcal{X})=0,\qquad \mathcal{X}\in\mathbb{R}.\tag{3.14}$$

L'équation (3.14) est appelée *équation auto-similaire stationnaire.* La variable $\mathcal{X}$ est appelée variable auto-similaire. Si $\beta=1$ alors les seules solutions sont $\Psi=c$ ou $\Psi=-\mathcal{X}$. Si $\beta=0$ alors les seules solutions sont $\Psi=0$ ou $\Psi=-\mathcal{X}$. On suppose donc $\beta\neq0,1$.

PROPOSITION 3.1 (Existence et unicité des profils autosimilaires rétrogrades). *On a les résultats suivants.*

- Existence. *Pour tout entier $i\geq1$, la fonction $\Phi_i:\mathcal{Y}\mapsto-\mathcal{Y}-\mathcal{Y}^{2i+1}$ définit un difféomorphisme sur $\mathbb{R}$. Son application inverse $\Psi_i=\Phi_i^{-1}$ est une solution de* (3.14) *pour $\beta=1+\frac{1}{2i}$.*
- Unicité. *Supposons $\beta\neq0,1$ et que* (3.14) *admette une solution $\Psi\in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\Psi'(\mathcal{X})\to0$ lorsque $|\mathcal{X}|\to\infty$. Alors il existe un entier $i\geq1$ tel que $\beta=1+\frac{1}{2i}$, et $\mu>0$ tel que $\Psi(\mathcal{X})=\mu\Psi_i(\frac{\mathcal{X}}{\mu})$ où Ψ_i est défini ci-dessus.*

Pour chaque $i\in\mathbb{N}$, $\mu>0$ et $T>0$, par le lemme 3.1 la fonction

$$u(t,x)=\mu(T-t)^{\frac{1}{2i}}\Psi_i\left(\frac{x}{\mu(T-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right)$$

est donc une solution de l'équation de Burgers (3.1). On constate (voir la remarque ci-dessous) que celle-ci devient singulière lorsque $t\uparrow T$ en $\mathcal{X}=0$ car $u_x(t,0)=\frac{-1}{T-t}\to-\infty$.

Remark 3.2. Il est intéressant de dessiner le graphe de la fonction Ψ_i. On peut vérifier par sa définition qu'elle est impaire en $\mathcal{X}$, positive pour $\mathcal{X}<0$ et négative pour $\mathcal{X}>0$, avec $\Psi(\mathcal{X})\sim(-\mathcal{X})^{\frac{1}{2i+1}}$ lorsque $\mathcal{X}\to-\infty$ et $\Psi(\mathcal{X})\sim-\mathcal{X}^{\frac{1}{2i+1}}$ lorsque $\mathcal{X}\to\infty$, décroissante sur $\mathbb{R}$ avec Ψ' qui atteint son minimum en $\mathcal{X}=0$, où

$$\Psi_i(0)=0,\quad \frac{d}{d\mathcal{X}}\Psi_i(0)=-1,\quad \frac{d^j}{d\mathcal{X}^j}\Psi_i(0)=0,\ j=2,...,2i\quad\text{et}\quad \frac{d^{2i+1}}{d\mathcal{X}^{2i+1}}\Psi_i(0)=2i{+}1!$$

Remark 3.3. La fonction $u(t,x)=(-t)^{\frac{1}{2i}}\Psi_i\left(\frac{x}{(-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right)$ est invariante par la transformation $u\mapsto\left((t,x)\mapsto\nu^{\frac{1}{2i}}u(\frac{t}{\nu},\frac{x}{\nu^{1+\frac{1}{2i}}})\right)$. Grâce à la remarque 3.1, cela signifie que cette solution est invariante par l'action du sous-groupe $\{(\nu,\nu^{1+\frac{1}{2i}},0,0,0)\}_{\nu>0}$ du groupe des symétries G. C'est là la définition générale des solutions auto-similaires pour une EDP : ce sont celles qui sont invariantes par l'action d'un sous-groupe du groupe de symétries. La solution s'obtient donc, pour tout temps, par l'application d'une des symétries de l'équation à la donnée initiale, d'où leur nom d'*autosimilaire.*

PROOF. On raisonne par analyse-synthèse. Soit Ψ une solution de (3.14) qui est C^∞, non nulle, et telle que $\Psi'(\mathcal{X}) \to 0$ lorsque $|\mathcal{X}| \to \infty$.

Étape 1. *Mise en place d'un changement de variable.* Il existe au moins un point tel que $\Psi(\mathcal{X}_0) \neq 0$, et donc par (3.14) on a $\Psi'(\mathcal{X}_0) \neq 0$. Soit I l'intervalle ouvert maximal contenant $\mathcal{X}_0$ sur lequel $\Psi' \neq 0$. Alors Ψ définit un C^∞ difféomorphisme entre I et l'intervalle ouvert $J = \Psi(I) = (a, b)$. Soit $\Phi = \Psi^{-1}$ son application réciproque. Nous affirmons que

$$\text{Si } a \neq -\infty \text{ alors } \lim_{\mathcal{Y}\downarrow a,} |\Phi(\mathcal{Y})| + |\Phi'(\mathcal{Y})| = \infty, \tag{3.15}$$

$$\text{Si } b \neq \infty \text{ alors } \lim_{\mathcal{Y}\uparrow b} |\Phi(\mathcal{Y})| + |\Phi'(\mathcal{Y})| = \infty. \tag{3.16}$$

En effet, supposons par l'absurde que $a \neq -\infty$ et que $|\Phi(\mathcal{Y})| + |\Phi'(\mathcal{Y})|$ reste borné lorsque $\mathcal{Y} \downarrow a$. Puisque Φ est un difféomorphisme de J vers I, alors Φ est monotone, et donc $\lim_{\mathcal{Y}\downarrow a} \Phi(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}^*$ existe. Si $\Psi'(\mathcal{X}^*) = 0$ alors $|\Phi'(\Psi(\mathcal{X}))| = \frac{1}{|\Psi'(\mathcal{X})|} \to \infty$ lorsque $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ avec $\mathcal{X} \in I$. Cela est impossible, et donc $\Psi'(\mathcal{X}^*) \neq 0$. Par définition de I alors $\mathcal{X}^* \in I$ et $a = \Psi(\mathcal{X}^*) \in J$. Cela est impossible car $J = (a, b)$, d'où l'affirmation.

Étape 2. *Obtention d'une formule.* Nous affirmons maintenant que si J possède un élément positif, alors $(0, \infty) \subset J$ et il existe $K_+ \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Phi(\mathcal{Y}) = K_+|\mathcal{Y}|^\gamma - \mathcal{Y}, \qquad \forall \mathcal{Y} > 0, \qquad \gamma = \frac{\beta}{\beta - 1}. \tag{3.17}$$

De même, nous affirmons que si J possède un élément négatif, alors $(-\infty, 0) \subset J$ et il existe $K_- \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Phi(\mathcal{Y}) = K_-|\mathcal{Y}|^\gamma - \mathcal{Y}, \qquad \forall \mathcal{Y} < 0. \tag{3.18}$$

Pour le montrer, rappelons que puisque $\Phi = \Psi^{-1}$ alors $\Psi'(\mathcal{X}) = \frac{1}{\Phi'(\Psi(\mathcal{X}))}$ sur J. En injectant dans (3.14), puis en multipliant par $\Phi'(\Psi(\mathcal{X}))$ on obtient

$$(1 - \beta)\Psi(\mathcal{X})\Phi'(\Psi(\mathcal{X})) + \beta\mathcal{X} + \Psi(\mathcal{X}) = 0.$$

En choisissant $\mathcal{X} = \Phi(\mathcal{Y})$ et en utilisant $\Psi(\Phi(\mathcal{Y})) = \mathcal{Y}$ il vient

$$(1 - \beta)\mathcal{Y}\Phi'(\mathcal{Y}) + \beta\Phi(\mathcal{Y}) = -\mathcal{Y}, \qquad \mathcal{Y} \in J. \tag{3.19}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre ! On peut donc la résoudre par la méthode de variation de la constante. Une solution de l'équation homogène associée $(1 - \beta)\mathcal{Y}\tilde{\Phi}' + \beta\tilde{\Phi} = 0$ est $\tilde{\Phi} = |\mathcal{Y}|^\gamma$ où l'on a posé $\gamma = \frac{\beta}{\beta-1}$. En posant $\Phi(\mathcal{Y}) = f(\mathcal{Y})|\mathcal{Y}|^\gamma$ l'équation (3.19) devient

$$(1 - \beta)\mathcal{Y}|\mathcal{Y}|^\gamma f'(\mathcal{Y}) = -\mathcal{Y}, \qquad \mathcal{Y} \in J.$$

On pose $J_- = J \cap (-\infty, 0)$. En résolvant cette équation sur J_- (lorsque cet ensemble est non vide), il existe une constante $K_- \in \mathbb{R}$ telle que $f(\mathcal{Y}) = K_-|\mathcal{Y}|^{-\gamma}\mathcal{Y}$ pour tout $\mathcal{Y} \in J_-$. Et donc

$$\Phi(\mathcal{Y}) = K_-|\mathcal{Y}|^\gamma - \mathcal{Y}, \qquad \forall \mathcal{Y} \in J_-. \tag{3.20}$$

On a $J_- = (a, \min(b, 0))$. En utilisant (3.15)-(3.16) et (3.20) on voit que $a = -\infty$ et $b \geq 0$, et donc $(-\infty, 0) \subset J$. Cela montre (3.18). La preuve de (3.17) est similaire et nous l'omettons.

Étape 3. *Détermination des paramètres.* Par le résultat de l'étape 2, on a trois possibilités : soit $J = \mathbb{R}$, soit $J = (0, \infty)$ ou bien $J = (-\infty, 0)$.

Montrons que $J = \mathbb{R}$. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $J = (0, \infty)$ (le cas $J = (-\infty, 0)$ étant similaire). Alors $a = 0$ et $b = \infty$. En utilisant (3.15) et (3.17) on voit que nécessairement $\gamma < 1$. Alors (3.17) implique que $\Phi(\mathcal{Y}) \sim -\mathcal{Y} \to -\infty$ et $\Phi'(\mathcal{Y}) \to -1$ lorsque $\mathcal{Y} \to \infty$. Donc en utilisant que $\Psi = \Phi^{-1}$ on a que $\Psi(\mathcal{X}) \to \infty$ lorsque $\mathcal{X} \to -\infty$, puis que $\Psi'(\mathcal{X}) = \frac{1}{\Phi'(\Psi(\mathcal{X}))} \to -1$ lorsque $\mathcal{X} \to -\infty$. Cela est en contradiction avec $\Psi'(\mathcal{X}) \to 0$ lorsque $|\mathcal{X}| \to \infty$.

Donc $J = \mathbb{R}$, et

$$\Phi(\mathcal{Y}) = \begin{cases} K_+|\mathcal{Y}|^\gamma - \mathcal{Y}, & \forall \mathcal{Y} > 0, \\ K_-|\mathcal{Y}|^\gamma - \mathcal{Y}, & \forall \mathcal{Y} < 0. \end{cases}$$

Puisque $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, la seule possibilité est que $\gamma = 1 + 2i$ pour un $i \in \mathbb{N}$, et que $K_+ = -K_-$, soit $K_+ = -K$ et $K_- = K$ pour un $K \in \mathbb{R}$. Comme $\gamma = \frac{\beta}{\beta - 1} \neq 1$, alors $i \in \mathbb{N}^*$. Si $K = 0$ alors $\Phi(\mathcal{Y}) = -\mathcal{Y}$ ce qui est impossible car alors $\Psi(\mathcal{X}) = -\mathcal{X}$. Donc $K \neq 0$, et

$$\Phi(\mathcal{Y}) = -K\mathcal{Y}^{2i+1} - \mathcal{Y}, \qquad \forall \mathcal{Y} \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Puisque $\Phi' = \frac{1}{\Psi' \circ \Phi}$ ne s'annule pas sur $J = \mathbb{R}$, alors (3.21) implique que $K > 0$. Soit $\phi : \mathcal{Y} \mapsto \mu\mathcal{Y}$ où $\mu = K^{-\frac{1}{2i}}$. Alors $\phi^{-1} : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y}/\mu$. On calcule que :

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \circ \Phi \circ \phi(\mathcal{Y}) &= -K\mu^{2i}\mathcal{Y}^{2i+1} - \mathcal{Y} \\ &= -\mathcal{Y}^{2i+1} - \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

Comme $\Phi = \Psi^{-1}$ et $\Psi_i^{-1} : Y \mapsto -\mathcal{Y}^{2i+1} - \mathcal{Y}$ cela donne $\phi^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \phi = \Psi_i^{-1}$. Donc $\Psi = \phi \circ \Psi_i \circ \phi^{-1}$. C'est-à-dire que $\Psi(\mathcal{X}) = \mu\Psi_i(\mathcal{X}/\mu)$ comme annoncé.

Étape 4. *Synthèse.* On a montré que les solutions, si elles existaient, étaient nécessairement sous la forme $\Psi(\mathcal{X}) = \mu\Psi_i(\mathcal{X}/\mu)$. On vérifie à l'aide du calcul menant à (3.19) de l'étape 2 que ces fonctions sont effectivement bien des solutions de (3.14) ce qui termine la preuve.

□

3. Résolution auto-similaire des singularités

Certaines solutions de l'équation de Burgers deviennent singulières en temps fini, voir la proposition 3.1. Nous nous intéressons maintenant au fait de déterminer à quoi ressemblent les solutions singulières. Les solutions auto-similaires de la proposition 3.1 donnent un exemple particulier : elles concentrent un profil sur une échelle spatiale qui converge vers 0. Voici en fait la dynamique générale lors de la formation de singularité : nous allons maintenant voir que toute solution devient auto-similaire près des singularités.

Lemme 3.1. *Soit u une solution donnée par le théorème 3.1 et $i \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\frac{du_0}{dx}$ atteigne un minimum négatif en un point X_0 au voisinage duquel u_0 est de classe C^{2i+1} et en lequel*

$$\frac{d^j u_0}{dx^j}(X_0) = 0 \text{ pour } j = 2, ..., 2i \quad \text{et} \quad \frac{d^{2i+1}u_0}{dx^{2i+1}}(X_0) > 0. \tag{3.22}$$

Alors il existe $c = u_0(X_0)$, $\mu > 0$ tel que pour $x^* = X_0 + Tc$ et $x(t) = X_0 + tc$ on a

$$u(t, x) = \mu(T - t)^{\frac{1}{2i}} \Psi_i \left(\frac{x - x(t)}{\mu(T - t)^{1 + \frac{1}{2i}}} \right) + c + v(t, x),$$

avec

$$\frac{v(t,x)}{(T-t)^{\frac{1}{2i}}\Psi_i\left(\frac{x-x(t)}{\mu(T-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right)} \to 0 \qquad \textit{lorsque } (t,x)\to(T,x^*). \tag{3.23}$$

PROOF. **Étape 1**. *Renormalisation pour simplifier les calculs.* Montrons que si le résultat est vrai dans le cas où

$$X_0 = 0, \quad u_0(X_0) = 0, \quad \frac{d}{dx}u_0(X_0) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{d^{2i+1}}{dx^{2i+1}}u_0(X_0) = (2i+1)! \tag{3.24}$$

et pour lequel $\mu = 1$, alors il est vrai dans le cas général. Cela est du aux symétries de l'équation. En effet, soit u_0 une donnée générale satisfaisant les hypothèses du lemme. Alors la donnée initiale $\tilde u_0(x) = \frac{\tilde\mu}{\tilde\lambda}u_0(\frac{x-\tilde x_0}{\tilde\mu}) + \tilde c$ a pour solution $\tilde u(t,x) = \frac{\tilde\mu}{\tilde\lambda}u_0(\frac{t}{\tilde\lambda}, \frac{x-\tilde x_0 - \tilde c t}{\mu}) + \tilde c$ par le lemme 3.1. En choisissant

$$\tilde\lambda = \frac{-1}{\frac{d}{dx}u_0(X_0)}, \quad \tilde\mu = \left(\frac{1}{\tilde\lambda(2i+1)!}\frac{d^{2i+1}}{dx^{2i+1}}u_0(X_0)\right)^{\frac{1}{2i}}, \quad \tilde x_0 = -\tilde\mu X_0, \quad \tilde c = -\frac{\tilde\mu}{\tilde\lambda}u_0(X_0),$$

on vérifie que $\frac{d}{dx}\tilde u_0$ atteint son minimum en 0 avec $\frac{d}{dx}\tilde u_0(0) = -1$, que $\tilde u_0(0) = 0$, que $\frac{d^j}{dx^j}\tilde u_0(0) = 0$ pour $j = 2, ..., 2i$ et $\frac{d^{2i+1}}{dx^{2i+1}}\tilde u_0(0) = (2i+1)!$. Si le résultat du lemme est vrai pour $\tilde u_0$, alors

$$\tilde u(t,x) = (1-t)^{\frac{1}{2i}}\Psi_i\left(\frac{x}{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right) + \tilde v(t,x),$$

avec $\tilde v$ satisfaisant l'estimation (3.23) près de $(1,0)$. Comme $u(t,x) = \frac{\tilde\lambda}{\tilde\mu}\tilde u(\tilde\lambda t, \tilde x_0 + \tilde c t + \tilde\mu x) - \frac{\tilde\lambda}{\tilde\mu}\tilde c$, la formule ci-dessus implique que u satisfait bien (3.23) pour $\mu = T^{-\frac{1}{2i}}\frac{\tilde\lambda}{\tilde\mu}$.

On suppose donc dorénavant que u_0 satisfait de plus (3.24).

Étape 2. *Calcul des lignes caractéristiques.* En utilisant (3.22) et (3.24), l'expansion de Taylor de u_0 près de $X_0 = 0$ s'écrit alors

$$u_0(X) = -X + X^{2i+1}(1 + r_0(X)). \tag{3.25}$$

où le reste satisfait $r_0(X) \to 0$ lorsque $X \to 0$. Les lignes caractéristiques s'écrivent alors

$$\begin{aligned} y(t,X) &= X + tu_0(X) \\ &= X + t(-X + X^{2i+1})(1 + r_0(X)) \\ &= (1-t)X + X^{2i+1}(1 + r(t,X)) \end{aligned} \tag{3.26}$$

où le reste est $r(t,X) = (t-1) + tr_0(X)$ et satisfait

$$r(t,X) \to 0 \qquad \text{lorsque } (t,X) \to (1,0). \tag{3.27}$$

Étape 2. *Calcul de l'inverse des lignes caractéristiques.* Pour $\nu > 0$ on introduit la fonction $\phi_\nu(x) = \nu x$ et on rappelle que Φ_i est définie dans la proposition 3.1. Alors on remarque que :

$$(1-t)X + X^{2i+1} = -\phi_{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}} \circ \Phi_i \circ \phi_{\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2i}}}}(X).$$

Puisque $\Phi_i^{-1} = \Psi_i$ et $\phi_\nu^{-1} = \phi_{\frac{1}{\nu}}$ l'application inverse de cette fonction est

$$\begin{aligned}\left(X \mapsto (1-t)X + X^{2i+1}\right)^{-1}(x) &= -\phi_{(1-t)^{\frac{1}{2i}}} \circ \Psi_i \circ \phi_{\frac{1}{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}}}(x)\\ &= -(1-t)^{\frac{1}{2i}} \Psi_i \left(\frac{x}{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Soit t proche de 1, et x proche de 0. On cherche la solution de $y(t,X) = x$ sous la forme suivante :

$$X = \overline{X}(1+h), \qquad \overline{X} = -(1-t)^{\frac{1}{2i}} \Psi_i \left(\frac{x}{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right)$$

pour un h petit à déterminer. Alors par (3.26) et (3.28) on calcule que

$$\begin{aligned} y(t,X) &= x + h(1-t)\overline{X} + [(1+h)^{2i+1} - 1]\overline{X}^{2i+1} + X^{2i+1} r\,(t,X)\\ &= x + R(h), \end{aligned}$$

où

$$R(h) = h(1-t)\overline{X} + X^{2i+1}\left(\frac{(1+h)^{2i+1} - 1}{(1+h)^{2i+1}} + r\,(t,X)\right).$$

Puisque $\Psi_i = (\mathcal{Y} \mapsto -\mathcal{Y} - \mathcal{Y}^{2i+1})^{-1}$ on a que $\Psi_i(\mathcal{X})| \leq |\mathcal{X}|^{\frac{1}{2i+1}}$. Ainsi, $|X| \leq C|x|^{\frac{1}{2i+1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, où C ne dépend pas de h si h est petit. Supposons $x > x_j$. Alors puisque Ψ_i est négative sur $(0,\infty)$ on a $X > 0$ et $\overline{X} > 0$. Pour h_+ petit positif, on a $\frac{(1+h_+)^{2i+1}-1}{(1+h_+)^{2i+1}} \geq h_+$ et alors

$$R(h_+) \geq X^{2i+1}\left(h_+ + r\,(t,X)\right) > 0$$

si h_+ est suffisamment grand par rapport à $r\,(t,X)$. De même, pour h_- petit négatif, avec $-h_-$ suffisamment grand par rapport à $r\,(t,X)$ on a $R(h_-) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\overline{h} \in (h_-, h_+)$ tel que :

$$y(t,X) = x \qquad \text{pour} \quad X = -(1+\overline{h})(1-t)^{\frac{1}{2i}} \Psi_i \left(\frac{x}{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right), \tag{3.29}$$

avec

$$\overline{h} \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad (t,x) \to (1,0).$$

Étape 3. *Calcul de la solution.* Puisque $u(t,x) = u_0(X)$ pour X tel que $y(t,X) = x$, en utilisant (3.29) et (3.25)

$$\begin{aligned} u(t,x) &= -X\left(1 + X^{2i}(1 + r_0(X))\right)\\ &= (1+\overline{h})(1-t)^{\frac{1}{2i}} \Psi_i \left(\frac{\tilde{x}}{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right)\left(1 + X^{2i}(1 + r_0(X))\right). \end{aligned}$$

En posant $v(t,x) = (1-t)^{\frac{1}{2i}} \Psi_i \left(\frac{x}{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right)\left(\overline{h} + (1+\overline{h})X^{2i+1}(1 + r_0(X))\right)$ on a bien $u(t,x) = (1-t)^{\frac{1}{2i}} \Psi_i \left(\frac{x}{(1-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right) + v(t,x)$ avec v satisfaisant (3.23).

□

Theoreme 3.1 (Résolution auto-similaire des singularités). *Soit u une solution donnée par le théorème 3.1, telle que u_0 est analytique sur $\mathbb{R}$ avec $\frac{du_0}{dx}(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$. Si u devient singulière en temps $T < \infty$, alors il existe $J \in \mathbb{N}^*$, J points $(x_j^*)_{1\leq j\leq J}$, entiers $i_j \in \mathbb{N}^*$ et réels $\mu_j > 0$ et $c_j \in \mathbb{R}$ tels que :*

(i) *Pour tout $j = 1, ..., J$, on a près de (T, x_j^*) que*

$$u(t,x) = \mu_j (T-t)^{\frac{1}{2i_j}} \Psi_{i_j} \left(\frac{x - x_j(t)}{\mu_j (T-t)^{1+\frac{1}{2i_j}}} \right) + c_j + v_j(t,x),$$

où $x_j(t) = x_j^* - (T-t)c_j$ et où

$$\frac{v_j(t,x)}{(T-t)^{\frac{1}{2i_j}} \Psi_{i_j} \left(\frac{x-x_j(t)}{\mu_j (T-t)^{1+\frac{1}{2i_j}}} \right)} \to 0 \qquad \text{lorsque } (t,x) \to (T, x_j^*).$$

(ii) *u et ses dérivées restent localement uniformément bornées jusqu'à T en dehors de tout voisinage de $\{x_1, ..., x_J\}$.*

Remark 3.2. Le théorème stipule que toutes les singularités de l'équation de Burgers, pour des solutions analytiques, sont asymptotiquement auto-similaire. L'auto-similarité apparaît donc de manière universelle. Cette universalité est expliquée par le lemme 3.1 : la solution forme une singularité auto-similaire car les lignes caractéristiques deviennent singulières de manière auto-similaire.

Remark 3.3. Si les solutions ne sont pas analytiques, alors d'autres types de singularités peuvent apparaître, voir l'article *Singularity formation for Burgers equation with transverse viscosity* de C. Collot, T.-E. Ghoul et N. Masmoudi.

Proof. Puisque $\frac{du_0}{dx}$ tend vers 0 à l'infini et prend des valeurs négatives, alors l'ensemble des points E où cette fonction atteint son minimum $m_0 < 0$ est un compact de $\mathbb{R}$. Par (3.5) on a :

$$T = -\frac{1}{m_0}.$$

Soit X un point de E, et soit

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-X)^k \tag{3.30}$$

le développement en série entière de u_0 en X. En particulier, $a_1 = m_0$ et il existe $R > 0$ tel que $\frac{|a_k|}{R^k} \to 0$. Si $a_k = 0$ pour tout $k \geq 2$, alors $u_0(x) = a_0 + (x-X)m_0$ (par unicité du développement en série entière), ce qui est impossible. Donc il existe $l \geq 2$ tel que $a_k = 0$ pour $k = 2, ..., l-1$, et $a_l \neq 0$. On a alors pour $x \in (X - R/2, X + R/2)$ que

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dx}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-X)^{k-1} = m_0 + l a_l (X-x)^{l-1} + \sum_{k=l+1}^{\infty} k a_k (x-X)^{k-1} \\ &= m_0 + l a_l (X-x)^{l-1} \left(1 + O(|x-X|)\right). \end{aligned}$$

Donc pour que X soit un minimum de $\frac{du_0}{dx}(x)$ nécessairement l doit être un entier impair $l = 1 + 2i$ pour un $i \in \mathbb{N}^*$, et $a_l = a_{2i+1} > 0$. Ainsi, X est un minimum local strict pour $\frac{du_0}{dx}$. Donc X est isolé dans E. Ainsi, E est un ensemble compact qui ne contient que des points isolés de $\mathbb{R}$. Donc E est un ensemble fini

$$E = \{X_1, ..., X_J\}.$$

En chacun des points $X \in E$ on a alors :

$$\frac{d^j u_0}{dx^j}(X) = 0 \text{ pour } j = 2, ..., 2i \quad \text{et} \quad \frac{d^{2i+1} u_0}{dx^{2i+1}}(X) > 0.$$

Le résultat (i) du théorème découle alors de l'application du lemme 3.1.

Pour montrer (ii), on constate que pour les lignes caractéristiques on a que $\frac{dy}{dX}(t, X_j) = 1 + t\frac{du_0}{dx}(X_j) = 1 - \frac{t}{T} \to 0$ lorsque $t \to T$. Mais en dehors de tout voisinage de $\{X_1, ..., X_j\}$ on a que $\frac{dy}{dX}(t, X)$ reste uniformément loin de 0 lorsque $t \to T$. L'application inverse des lignes caractéristiques $(t, x) \mapsto X(t, x)$ ainsi que ses dérivées restent donc localement uniformément bornées. Il en va de même pour u puisque $u(t, x) = u_0(X(t, x))$.

□

4. Exercices

EXERCICE 3.1. *On considère la fonction*

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}\cos(x), & x \in [-\pi, \pi], \\ \frac{1}{2} & |x| > \pi. \end{cases}$$

1. *Montrer qu'il existe* $\tilde{T} > 0$ *et une solution* $u \in C^1([0, \tilde{T}), \mathbb{R})$ *de l'équation de Burgers* (3.1)*.*
2. *Montrer que la solution maximale issue de* u_0 *devient singulière en temps fini* $T < \infty$ *à déterminer.*
3. *On dit qu'un point* $x^* \in \mathbb{R}$ *est un point d'explosion si il existe* $(t_n, x_n) \to (T, x^*)$ *tel que* $|\frac{\partial}{\partial x}u(t_n, x_n)| \to \infty$*. Montrer que* u *a un unique point d'explosion* x^* *à déterminer.*
4. *Montrer qu'il existe* $i \in \mathbb{N}$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *à déterminer, et* $\mu > 0$*, tels que*
$$u(t, x) = \mu(T-t)^{\frac{1}{2i}}\Psi_i\left(\frac{x - x(t)}{\mu(T-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right) + c + v(t, x)$$
avec $x(t) = x^* - c(T - t)$ *et*
$$\frac{v(t, x)}{(T-t)^{\frac{1}{2i}}\Psi_i\left(\frac{x-x(t)}{\mu(T-t)^{1+\frac{1}{2i}}}\right)} \to 0 \qquad \textit{lorsque } (t, x) \to (T, x^*).$$

EXERCICE 3.2. *Pour* $\gamma > 0$*, on considère la fonction* $\Phi_\gamma : \mathcal{Y} \mapsto -\mathcal{Y} - |\mathcal{Y}|^{2\gamma}\mathcal{Y}$ *qui est un* C^1 *difféomorphisme de* $\mathbb{R}$*.*

- *On note* $\Psi_\gamma = \Phi_\gamma^{-1}$ *son application inverse. Montrer que* $\lim_{|\mathcal{X}|\to\infty} |\Psi'_\gamma(\mathcal{X})| = \infty$*. En vous inspirant de la preuve de la proposition 3.1, montrer que* Ψ_γ *est une solution de* (3.14)*.*
- *En déduire que* $u(t, x) = (1-t)^{\frac{1}{2\gamma}}\Psi_\gamma(\frac{x}{(1-t)^{1+\frac{1}{2\gamma}}})$ *est une solution de l'équation de Burgers* (3.1)*.*
- *Montrer que si* $\gamma \notin \mathbb{N}$*, alors* $\Psi_\gamma \notin C^k$ *pour* $k > 2\gamma + 1$*.*

Remarque : *Cela signifie qu'il existe des solutions auto-similaires non* C^∞ *de l'équation de Burgers.*

EXERCICE 3.3. *On considère l'espace de fonctions*

$$\mathcal{E} = \{f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \frac{d^j f}{dx^j} \in L^\infty(\mathbb{R}) \textit{ pour } j = 0, 1, 2, 3\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{E}} = \sum_{j=0}^{3} \|\frac{d^j f}{dx^j}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

On considère également l'ensemble

$$\mathcal{O} = \left\{ f \in \mathcal{E},\ \frac{df}{dx} \text{atteint son minimum, qui est négatif, en un unique point } x_0 \text{ et } \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0) > 0 \right\}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathcal{E}$.*
2. *On dit qu'un point $x^* \in \mathbb{R}$ est un point d'explosion si il existe $(t_n, x_n) \to (T, x^*)$ tel que $|\frac{\partial}{\partial x} u(t_n, x_n)| \to \infty$. Montrer que pour toute donnée initiale $u_0 \in \mathcal{O}$, la solution de l'équation de Burgers a unique point d'explosion x^*.*
3. *Montrer que et que cette singularité est décrite par le profil Ψ_1, i.e. qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$ tels que*

$$u(t, x) = \mu\sqrt{T - t}\Psi_1 \left(\frac{x - x(t)}{\mu(T - t)^{\frac{3}{2}}} \right) + c + v(t, x)$$

avec $x(t) = x^* - c(T - t)$ et $\frac{v(t,x)}{\sqrt{T-t)}\Psi_1\left(\frac{x-x(t)}{\mu(T-t)^{3/2}}\right)} \to 0$ lorsque $(t, x) \to (T, x^*)$.

Remarque : *Cela signifie que le profil Ψ_1 est associé à une singularité stable. Si on perturbe une donnée initiale dans $\mathcal{O}$, celle-ci reste dans $\mathcal{O}$ et la singularité concentre toujours le profil Ψ_1.*

CHAPTER 4

Outils d'analyse harmonique I : Interpolation

Dans ce qui suit, (X, μ) et (Y, ν) désignent deux espaces mesurés quelconques. Toutes les fonctions qui apparaîtront sont implicitement supposées être mesurables.

1. Les espaces L^p faibles

Pour une fonction $f : \mu \mapsto \mathbb{C}$, on définit la fonction de distribution de f

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X,\ |f(x)| > \alpha\}).$$

Comme $\mu(\{x \in X,\ \alpha < |f(x)| < \beta\}) = d_f(\alpha) - d_f(\beta)$, la fonction d_f permet en quelque sorte de mesurer la taille des ensembles de niveaux de la fonction f. On rappelle le principe de Cavalieri.

Proposition 4.1. *Pour $f \in L^p(X, \mu)$ pour $1 \leq p < \infty$ on a*

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

Proof. En utilisant le théorème de Fubini, on calcule effectivement que :

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_X \mathbf{1}_{\{x,\ |f(x)|>\alpha\}}(x) d\mu(x) d\alpha \\ &= \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha d\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \\ &= \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

□

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace L^p faible est noté $L^{p,\infty}$, et est définit comme l'ensemble des fonctions f telles que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf\{C > 0,\ d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p} \text{ pour tout } \alpha > 0\} < \infty.$$

Par définition, si $f \in L^{p,\infty}$ alors $d_f(\alpha) \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \alpha^{-p}$ pour tout $\alpha > 0$.

Proposition 4.2. *Pour tout $1 \leq p < \infty$ on a que $L^p \subset L^{p,\infty}$ avec pour tout $f \in L^p$ que $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$.*

Proof. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a effectivement

$$\alpha^p d_f(\alpha) = \int_X \alpha^p \mathbf{1}_{\{x, |f(x)|>\alpha\}} d\mu(x) \leq \int_X |f(x)|^p \mathbf{1}_{\{x, |f(x)|>\alpha\}} d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}^p.$$

□

2. Interpolation

2.1. Interpolation réelle. Nous allons maintenant énoncer le théorème d'interpolation de Marcienkiewicz.

THEOREME 4.1. *Soient $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. Soit T en opérateur définit sur $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ avec $T(f)$ une fonction mesurable sur Y. On suppose que T est sous-linéaire au sens où*

$$|T(f+g)(x)| \leq |T(f)(x)| + |T(g)(x)| \tag{4.1}$$

pour tous f et g, et $x \in Y$, et qu'il existe deux constantes $C_0, C_1 > 0$ telles que,

$$\|T(f)\|_{L^{p_0,\infty}(Y)} \leq C_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)} \qquad \text{pour tout } f \in L^{p_0}(X), \tag{4.2}$$

et, si $p_1 < \infty$, que

$$\|T(f)\|_{L^{p_1,\infty}(Y)} \leq C_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)} \qquad \text{pour tout } f \in L^{p_1}(X), \tag{4.3}$$

et si $p_1 = \infty$ que $\|T(f)\|_{L^\infty(Y)} \leq C_1 \|f\|_{L^\infty(X)}$ ci-dessus. Alors pour tout $p_0 < p < p_1$, T envoie $L^p(X)$ dans $L^p(Y)$, avec

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \leq C_p \|f\|_{L^p(X)} \tag{4.4}$$

pour une constante $C_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\right)^{1/p} C_0^{\frac{1/p-1/p_1}{1/p_0-1/p_1}} C_1^{\frac{1/p_0-1/p}{1/p_0-1/p_1}}$.

PROOF. **Étape 1**. *Preuve pour le cas $p_1 < \infty$.* Soit $\delta > 0$ un paramètre qui nous servira plus tard à calculer explicitement la constante C_p. Pour $\alpha > 0$ on décompose $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ avec

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \quad f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $f_0^\alpha \in L^{p_0}$. En effet, par définition $|f_0^\alpha|^{p_0} \leq |f|^p (\delta\alpha)^{p_0-p}$ et donc $\|f_0^\alpha\|_{L^{p_0}}^{p_0} \leq (\delta\alpha)^{p_0-p} \|f\|_{L^p}^p$. De même, $f_1^\alpha \in L^{p_1}$. Par (4.1) on a $|T(f)| \leq |T(f_0^\alpha)| + |T(f_1^\alpha)$ et donc

$$\{x,\ |T(f)(x)| > \alpha\} \subset \{x,\ |T(f_0^\alpha)(x)| > \alpha/2\} \cup \{x,\ |T(f_1^\alpha)(x)| > \alpha/2\}.$$

Cela implique

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) + d_{T(f_1^\alpha)}(\alpha/2).$$

Grâce à (4.4) et (4.3) on en déduit que

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq \frac{C_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{|f(x)|>\delta\alpha} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) + \frac{C_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{|f(x)|\leq\delta\alpha} |f(x)|^{p_1} d\mu(x).$$

En utilisant la proposition 4.1, puis l'inégalité ci-dessus, puis Fubini, on en déduit

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^p}^p &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha)d\alpha \\
&\leq p(2C_0)^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0}\int_{|f(x)|>\delta\alpha}|f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\alpha \\
&\quad + p(2C_1)^{p_1}\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_1}\int_{|f(x)|\leq\delta\alpha}|f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\alpha \\
&= p(2C_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/\delta}\alpha^{p-1-p_0}d\alpha d\mu(x) \\
&\quad p(2C_1)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\int_{|f(x)|/\delta}^\infty \alpha^{p-1-p_1}d\alpha d\mu(x) \\
&= \frac{p(2C_0)^{p_0}}{p-p_0}\frac{1}{\delta^{p-p_0}}\int_X |f(x)|^p d\mu(x) + \frac{p(2C_1)^{p_1}}{p_1-p}\delta^{p_1-p}\int_X |f(x)|^p d\mu(x).
\end{aligned}$$

Donc $\|T(f)\|_{L^p}^p \leq C(\delta)\|f\|_{L^p}^p$ pour tout $\delta > 0$ avec $C(\delta) = \frac{p(2C_0)^{p_0}}{p-p_0}\frac{1}{\delta^{p-p_0}} + \frac{p(2C_1)^{p_1}}{p_1-p}\delta^{p_1-p}$. On va maintenant montrer (4.4) en optimisant sur δ pour choisir la meilleure constante $C(\delta)$. On calcule que $C'(\delta) = -\frac{p(2C_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0+1}} + p(2C_1)^{p_1}\delta^{p_1-p}$. On constate que C' est négative sur $(0,\delta^*)$ avec $\delta_* = \left(\frac{(2C_0)^{p_0}}{(2C_1)^{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_1-p_0}}$, puis positive sur (δ^*,∞). Le minimum de $C(\delta)$ est donc atteint en δ^*, et $C_p = C(\delta^*)^{1/p}$ est la constante recherchée.

Étape 2. *Preuve pour le cas* $p_1 = \infty$. Ce cas, similaire au précédent, fait l'objet de l'exercice 4.1.

□

2.2. Interpolation complexe. Nous allons maintenant énoncer le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Theoreme 4.2. *Soient* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ *et* T *un opérateur linéaire qui soit continu de* $L^{p_0}(X, d\mu)$ *dans* $L^{q_0}(X, d\nu)$, *et de* $L^{p_1}(X, d\mu)$ *dans* $L^{q_1}(Y, d\nu)$:

$$\|Tf\|_{L^{q_0}} \leq C_0\|f\|_{L^{p_0}} \qquad et \qquad \|Tf\|_{L^{q_1}} \leq C_1\|f\|_{L^{p_1}}. \tag{4.5}$$

Alors pour tout $0 \leq \theta \leq 1$, *pour* p *et* q *tels que*

$$1/p = \theta/p_0 + (1-\theta)/p_1 \qquad et \qquad 1/q = \theta/q_0 + (1-\theta)/q_1 \tag{4.6}$$

on a que T *est continu de* $L^p(X, d\mu)$ *and* $L^q(Y, d\nu)$ *avec*

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C_0^\theta C_1^{1-\theta}\|f\|_{L^p}. \tag{4.7}$$

Pour démontrer le théorème 2.2, nous allons avoir besoin du lemme des deux droites d'Hadamard.

Lemme 4.1. *Soit* F *une fonction analytique sur l'ensemble* $\{z \in \mathbb{C},\ 0 < \Re z < 1\}$, *continue et bornée sur* $\{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq \Re z \leq 1\}$. *On suppose que* $|F(z)| \leq C_0$ *si* $\Re z = 0$, *et que* $|F(z)| \leq C_1$ *si* $\Re z = 1$. *Alors pour tout* z *tel que* $0 \leq \Re z \leq 1$ *on a* $F(z)| \leq C_0^{1-\Re z}C_1^{\Re z}$.

Proof. **Étape 1**. *Preuve du résultat pour* F *localisée.* On pose $E = \{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq \Re z \leq 1\}$. Montrons d'abord le résultat si $\lim_{z\in E, |z|\to\infty} F(z) = 0$ et $C_0, C_1 > 0$. Dans ce cas, considérons la fonction $G(z) = C_0^{-z}C_1^{-(1-z)}F(z)$ qui est aussi analytique. On a $|G(z)| = C_0^{-(1-\Re z)}C_1^{-\Re z}|F(z)|$ et donc $\lim_{z\in E,|z|\to\infty} G(z) = 0$.

La fonction $|G|$ atteint donc son maximum M en un point $z_0 \in E$. Puisque G est analytique sur l'intérieur de E et continue sur E, alors par le principe du maximum pour les fonctions analytiques, $z_0 \in \partial E$. Or pour $\Re z = 0$ on a $|G(z)| = C_0^{-1}|F(z)| \leq 1$, et de même pour $\Re z = 1$ on a $|G(z)| = C_1^{-1}|F(z)| \leq 1$. Donc $|G(z_0)| \leq 1$ et ainsi $|G(z)| \leq 1$ pour tout $z \in E$. Donc $F(z)| \leq C_0^{1-\Re z}C_1^{\Re z}$ comme annoncé.

Étape 2. *Preuve du résultat dans le cas général.* Considérons pour tout entier n la fonction $F_n(z) = F(z)e^{(z^2-1)/n}$ et les constantes $C_{0,n} = C_0 + \frac{1}{n}$ et $C_{1,n} = C_1 + \frac{1}{n}$. Alors $|F_n(z)| \leq |F(z)|e^{((\Re z)^2-(\Im z)^2-1)/n}$. On peut donc appliquer le résultat de l'étape 1 à F_n pour les constantes $C_{0,n}$ et $C_{1,n}$. On obtient $|F_n(z)| \leq C_{0,n}^{1-\Re(z)}C_{1,n}^{\Re z}$. En faisant tendre n vers l'infini, cela donne bien $|F(z)| \leq C_0^{1-\Re(z)}C_1^{\Re z}$. □

On peut maintenant démontrer le théorème d'interpolation Riesz-Thorin.

Preuve du théorème . On rappelle qu'une fonction est dite étagée si elle est de la forme $f(x) = \sum_1^N a_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$ pour des ensembles de mesure finie $A_1, ..., A_N$.

Soit $\theta \in (0,1)$, p et q donnés par (4.6), et q' l'exposant conjugué de q. On raisonne par dualité. Nous allons montrer que pour toutes fonctions étagées f sur X, alors

$$\sup_{g \in L^{q'}(Y),\ g \neq 0} \frac{1}{\|g\|_{L^{q'}}} \left| \int_Y T(f) g d\nu(y) \right| \leq C_0^\theta C_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p}. \tag{4.8}$$

Par (4.8), on aura alors par dualité que $T(f) \in L^q$ avec $\|T(f)\|_{L^q} \leq C_0^\theta C_1^{1-\theta}\|f\|_{L^p}$. Par densité de l'ensemble des fonctions étagées dans L^p, on aura alors que T s'étend en un unique opérateur continu de L^p dans L^q avec norme d'opérateur $C_0^\theta C_1^{1-\theta}$. Cela démontrera le théorème.

Il reste donc à démontrer (4.8). À nouveau, par densité, il suffit de démontrer que si g est une fonction étagée sur Y,

$$\left| \int_Y T(f) g d\nu(y) \right| \leq C_0^\theta C_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}. \tag{4.9}$$

Soient donc f étagée sur X et g étagée sur Y. On pose pour $z \in C$ avec $0 \leq \Re z \leq 1$:

$$f_z(x) = |f(z)|^{c_0+c_1 z} f(z) \quad \text{et} \quad g_z(x) = |g(z)|^{c_0'+c_1' z} g(z)$$

avec $c_0 = \frac{p}{p_0} - 1$ et $c_1 = \frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_0}$, et $c_0 = \frac{q'}{q_0'} - 1$ et $c_1 = \frac{q'}{q_1'} - \frac{q'}{q_0'}$. On remarque que f_z et g_z sont à nouveau des fonctions étagées. Par (4.6) on a $c_0 + c_1(1-\epsilon) = 0$ et donc

$$f_{1-\theta} = f \quad \text{et} \quad g_{1-\theta} = g \tag{4.10}$$

Comme $|f_z| = |f|^{c_0+c_1\Re z+1}$, que $c_0 + 1 = \frac{p}{p_0}$ et $c_0 + c_1 + 1 = \frac{p}{p_1}$, on a également $|f_z|^{p_0} = |f|^p$ si $\Re z = 0$ et $|f_z|^{p_1} = |f|^p$ si $\Re z = 1$. Donc

$$\|f_z\|_{L^{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \text{ si } \Re z = 0 \quad \text{et} \quad \|f_z\|_{L^{p_1}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \text{ si } \Re z = 1. \tag{4.11}$$

On vérifie de même que

$$\|g_z\|_{L^{q_0'}} = \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}} \text{ si } \Re z = 0 \quad \text{et} \quad \|g_z\|_{L^{q_1'}} = \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}} \text{ si } \Re z = 1. \tag{4.12}$$

On pose alors

$$F(z) = \int_Y T(f_z) g_z d\nu.$$

On a que la fonction F est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. Elle est bornée sur $\{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq \Re z \leq 1\}$. Pour $\Re z = 0$, par les hypothèse (4.5) et (4.11), on a

$T(f_z) \in L^{q_0}$ avec $\|T(f_z)\|_{L^{q_0}} \leq C_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}$. En appliquant l'inégalité de Hölder en utilisant (4.12) on a alors

$$|F(z)| \leq \|T(f_z)\|_{L^{q_0}} \|g_z\|_{L^{q_0'}} \leq C_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}}.$$

Si $\Re z = 1$, on obtient de manière similaire que $|F(z)| \leq C_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1'}}$. En utilisant (4.10), et en appliquant le lemme 4.1 on a alors

$$\left| \int_Y T(f) g d\nu \right| = |F(1-\theta)| \leq C_0^\theta C_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}\theta + (1-\theta)\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0'}\theta + (1-\theta)\frac{q'}{q_1'}} = C_0^\theta C_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

oú l'on a utilisé (4.6). Cela montre (4.9) comme souhaité.

□

2.3. Application : inégalités de Young pour la convolution. On rappelle la définition de la convolution $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$.

LEMME 4.2. *Soient* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}. \tag{4.13}$$

Alors pour toutes fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *on a* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ *avec*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.14}$$

PROOF. **Étape 1**. *Preuve pour* $p = 1$. Soit $f \in L^1$. On considère l'opérateur $T(g) = f * g$. Si $g \in L^1$ par Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| dy dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_{L^1} |g(y)| dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Donc T est continu de L^1 dans L^1 avec $\|Tg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$. Si $g \in L^\infty$, $|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \|g\|_{L^\infty} dy \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}$. Donc T est continu de L^∞ dans L^∞ avec $\|Tg\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}$. Pour tout $q \in [1, \infty]$, on applique le théorème 2.2, avec $p_0 = q_0 = 1$ et $p_1 = q_1 = \infty$ et $\theta = \frac{1}{q}$: l'opérateur T est continu de L^q dans L^q avec $\|Tg\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q}$, soit

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q}.$$

Étape 2. *Preuve pour* p *général.* Soit $g \in L^q$. On considère l'opérateur $T'(f) = f * g$. Par l'étape 1, si $f \in L^1$ alors $f * g \in L^q$ avec $\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q}$. Donc T est continu de L^1 dans L^q avec $\|T(f)\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q}$. Soit $q' = q/(q-1)$ l'exposant conjugué de q. Par Hölder, si $f \in L^{q'}$, alors $|f * g|(x) = |\int f(x-y) g(y) dy| \leq \|f\|_{L^{q'}} \|g\|_{L^q}$. Donc T est continu de $L^{q'}$ dans L^∞ avec $\|T(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{q'}} \|g\|_{L^q}$.

Soit $p \in [1, q']$, et $\theta \in [0, 1]$ tel que $\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}$. Soit r donné par (4.13). Alors on calcule que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{\infty}$. On applique le théorème 2.2, avec $p_0 = 1$, $p_1 = q'$, $q_0 = q$ et $q_1 = \infty$ et $\theta = \frac{q}{r}$: l'opérateur T est continu de L^p dans L^r avec norme d'opérateur 1, ainsi

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

□

3. Exercices

Exercice 4.1. *Reprenez la preuve du théorème 4.1, et démontrer le résultat dans le cas* $p_1 = \infty$.

Exercice 4.2. *On suppose que* T *est un opérateur linéaire tel que* $\|Tu\|_{L^{1,\infty}} \leq C_0\|u\|_{L^1}$ *et qu'il existe* $1 < p \leq \infty$ *tel que* $\|Tu\|_{L^p} \leq C_1\|u\|_{L^p}$. *Démontrer que pour tout* $1 < q \leq p$, T *est un opérateur continu sur* L^q *avec*

$$\|u\|_{L^q} \leq 8(\frac{1}{p-1})^{\frac{1}{p}} C_0^{\frac{1/q-1/p}{1-1/p}} C_1^{\frac{1-1/q}{1-1/p}}$$

(indication : en utilisant les théorèmes 4.1 et 2.2 avec des exposants bien choisis)

CHAPTER 5

Outils d'analyse harmonique II : Théorème de différentiation de Lebesgue

Ce chapitre est a completer

1. Théorème de différentiation de Lebesgue

THEOREME 5.1. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy = u(x)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Exercices

EXERCICE 5.1. *Montrer que pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy}{Vol(B(x,r))} = 0 \tag{5.1}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

EXERCICE 5.2. *Un cube de longueur d'arête $\ell > 0$ est un ensemble de la forme*

$$Q = [y_1, y_1 + \ell) \times ... \times [y_n, y_n + \ell)$$

pour un $y \in \mathbb{R}^n$. Soit un ensemble de cubes $\{Q_\ell^x\}_{(x,\ell) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\ell > 0$, le cube Q_ℓ^x est de longueur d'arête ℓ et satisfait $x \in Q_\ell^x$.

Montrer que pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\lim_{\ell \downarrow 0} \frac{\int_{Q_\ell^x} u(y) dy}{Vol(Q_\ell^x)} = u(x) \tag{5.2}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

CHAPTER 6

L'équation de la chaleur linéaire dans les espaces de Lebesgue

On considère à nouveau l'équation de la chaleur linéaire

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6.1}$$

que l'on souhaite étudier dorénavant pour u_0 dans un espace de Lebesgue. Nous allons voir dans la proposition 6.1 que la solution est toujours donnée par la formule (1.21). On introduit alors les opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ définis par

$$\begin{cases} S(0)f = f, \\ S(t)f = K(t,\cdot) * f \qquad \text{pour } t > 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

1. Le semi-groupe de la chaleur

1.1. Problème de Cauchy. On peut tout d'abord se demander dans quel sens la condition initiale de (6.1) est satisfaite. Celle-ci est satisfaite au sens d'une limite presque partout au sens de (6.3).

PROPOSITION 6.1. *Soit $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour un $p \in [1,\infty]$, et $u(t) = S(t)u_0$ donnée par (1.21). Alors $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, résout l'équation de la chaleur (1.10) sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, et satisfait*

$$\lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = u_0(x) \qquad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.3}$$

PROOF. La preuve que $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, résout l'équation de la chaleur (1.10) sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ et est bornée ainsi que ses dérivées sur $[t_0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ est très similaire à celle de la proposition 1.1. Nous nous contenterons de démontrer (6.3).

Étape 1. *Estimation de $|u_0(y) - u_0(x)|$ en moyenne sur des boules.* En décomposant $u_0 = u_0^+ + u_0^-$, avec $u_0^+ = u_0 \mathbf{1}(\{u \geq 0\})$ et $u_0^- = u_0 \mathbf{1}(\{u > 0\})$, et en appliquant la version (5.2) du théorème de Lebesgue, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\int_{B(x,r)} |u_0(y) - u_0(x)| dy}{\mathrm{Vol}(B(x,r))} = 0. \tag{6.4}$$

De plus, par l'inégalité de Hölder, on a pour tout $r > 0$

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |u_0(y)| dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)| \mathbb{1}(|y-x| \leq r) dy \\ &\leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\mathbb{1}(|\cdot - x| \leq r)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\mathrm{Vol}(B(x,r))\right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

On peut donc également majorer :

$$\begin{aligned}\frac{\int_{B(x,r)}|u_0(y)-u_0(x)|dy}{\mathrm{Vol}(B(x,r))} &\le \frac{\int_{B(x,r)}|u_0(y)|dy}{\mathrm{Vol}(B(x,r))}+\frac{\int_{B(x,r)}|u_0(x)|dy}{\mathrm{Vol}(B(x,r))}\\ &\le \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left(\mathrm{Vol}(B(x,r))\right)^{\frac{1}{p'}-1}+|u_0(x)|.\end{aligned}$$

Puisque $r\mapsto \left(\mathrm{Vol}(B(x,r))\right)^{\frac{1}{p'}-1}$ est une fonction décroissante, en combinant cette inégalité avec (6.4) on obtient qu'il existe $M>0$ (dépendante de x) telle que

$$\int_{B(x,r)}|u_0(y)-u_0(x)|dy\le M\ \mathrm{Vol}(B(x,r)) \tag{6.5}$$

pour tout $r>0$.

Étape 2. *Preuve de* (6.3). Soit x tel que (6.4) soit vérifié. Puisque $\int_{\mathbb{R}^n}K(t,y)dy=1$ par (1.14), on décompose alors

$$u(t,x)=u_0(x)+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x+y)-u_0(x))K(t,y)dy}_{\tilde u(t,x)} \tag{6.6}$$

et on veut montrer $\tilde u(t,x)\to 0$ lorsque $t\downarrow 0$. Pour cela, on décompose pour $R>0$

$$\tilde u(t,x)=\underbrace{\int_{|y|\le R\sqrt{t}}(u_0(x+y)-u_0(x))K(t,y)dy}_{I}+\underbrace{\int_{|y|>R\sqrt{t}}(u_0(x+y)-u_0(x))K(t,y)dy}_{II}.$$

En utilisant $|K(t,\cdot)|\le t^{-n/2}$ par (1.13), on majore le premier terme par

$$\begin{aligned}|I| &\le \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\int_{|y|\le R\sqrt{t}}|u(x+y)-u(x)|dy\\ &=\frac{\mathrm{Vol}(B(x,R\sqrt{t}))}{t^{\frac{n}{2}}}\frac{\int_{B(x,\sqrt{t}R)}|u(y)-u(x)|dy}{\mathrm{Vol}(B(x,\sqrt{t}R))}\\ &\to 0\end{aligned} \tag{6.7}$$

lorsque $t\downarrow 0$ en utilisant que $\frac{\mathrm{Vol}(B(x,R\sqrt{t}))}{t^{\frac{n}{2}}}=R^n\mathrm{Vol}(B(0,1))$ et (6.4).

Pour majorer le second terme, on effectue une *partition dyadique*

$$II=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^j\sqrt{t}R<|y|\le 2^{j+1}R\sqrt{t}}(u_0(x+y)-u_0(x))K(t,y)dy.$$

Pour $j\in\mathbb{N}^*$ et $2^j\sqrt{t}R<|y|\le 2^{j+1}\sqrt{t}R$, on majore $|K(t,y)|\le t^{-n/2}e^{-\frac{(2^jR)^2}{4}}$ par (1.13). On vérifie que la fonction $z\mapsto z^{n+1}e^{-\frac{z^2}{4}}$ est bornée pour $z>0$, et donc qu'il existe $C>0$ telle que $e^{-\frac{z^2}{4}}\le Cz^{-n-1}$. On peut alors majorer $|K(t,y)|\le Ct^{-n/2}2^{-nj-j}R^{-n-1}$. En utilisant (6.5) on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_{2^j\sqrt{t}R<|y|\le 2^{j+1}R\sqrt{t}}(u_0(x+y)-u_0(x))K(t,y)dy\right| &\le \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}R^{n+1}2^{nj+j}}\int_{|y|\le 2^{j+1}R\sqrt{t}}|u_0(x+y)-u_0(x)|dy\\ &\le \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}R^{n+1}2^{nj+j}}M\ \mathrm{Vol}(B(x,2^{j+1}\sqrt{t}R))\\ &=\frac{C'}{R2^j}\end{aligned}$$

où l'on a introduit $C' = CM\ \mathrm{Vol}(B(0,2))$. Donc

$$|II| \leq \frac{C'}{R}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{C'}{R}. \tag{6.8}$$

En injectant (6.7) et (6.8) dans (6.6), en faisant tendre t vers 0 puis R vers $+\infty$, on obtient bien que $u(t,x) \to u_0(x)$ comme désiré.

$\square$

Nous allons maintenant voir que l'équation de la chaleur peut-être vue comme un système dynamique dans les espaces de Lebesgue.

Definition 6.1. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, et $(T(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de $\mathcal{B}$ dans lui même. On dit que c'est un semi-groupe fortement continu si :*

(i) *$T(0) = Id$,*
(ii) *$T(t+s) = T(s)T(t)$ pour tous $t, s \geq 0$,*
(iii) *Pour tout $u_0 \in \mathcal{B}$, la fonction $t \mapsto T(t)u_0$ est continue de $[0,\infty)$ à valeur dans $\mathcal{B}$.*

On dit que de plus qu'il est contractant si

(iv) *$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.*

Proposition 6.2. *Pour tout $p \in [1,\infty)$ on a que $(S(t))_{t\geq 0}$ donné par (6.2) est un semi-groupe contractant sur $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Remark 6.1. Pour $p = \infty$, on a que les points (i), (ii) et (iii) sont toujours vérifiés, mais que le point (iv) n'est plus vrai (voir Exercice).

Proof. Preuve de (iv). On a $\|K(t,\cdot)\|_{L^1} = 1$ par (1.14). Donc $\|K(t,\cdot) * u_0\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{L^p}$ par l'inégalité de Young pour la convolution (4.14).

Preuve de (i). Ce point provient de la définition même (6.2).

Preuve de (ii). Si $t = 0$ ou $s = 0$ le résultat est immédiat en utilisant que $S(0) = \mathrm{Id}$. On suppose maintenant $t, s > 0$. On rappelle que la transformée de Fourier de la Gaussienne est $\mathcal{F}(x \mapsto \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{e^{-|x|^2}}{4})(\xi) = e^{-|\xi|^2}$, c'est-à-dire $\widehat{K}(1,\cdot)(\xi) = e^{-|\xi|^2}$. Si f est une fonction et $f_\lambda = f(x/\lambda)$, alors $\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = \lambda^d \mathcal{F}f(\lambda\xi)$, car $\int e^{-i\xi x}f(x/\lambda)dx = \lambda^d\int e^{-i\lambda\xi x}f(x)dx$. Comme $K(t,x) = t^{-d/2}K(1,x/\sqrt{t})$, on en déduit donc que $\widehat{K}(t,\cdot)(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$. Comme $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ on en déduit $\mathcal{F}(K(t,\cdot) * K(s,\cdot))(\xi) = e^{-t|\xi|^2}e^{-s|\xi|^2} = \mathcal{F}(K(t+s,\cdot)$. Donc par injectivité de la transformée de Fourier :

$$K_{t,\cdot} * K(s,\cdot) = K_{t+s}(\cdot).$$

Comme $(u * v) * w = u * (v * w)$, alors $S(t+s)u_0 = K(t+s,\cdot) * u_0 = K(t,\cdot) * (K(s,\cdot)u_0) = S(t)S(s)u_0$.

Preuve de (iii). Soit $u_0 \in L^p$. Nous affirmons tout d'abord la continuité de la trajectoire à l'instant initial

$$\|S(t)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \qquad \text{lorsque } t \to 0. \tag{6.9}$$

Soit donc $\epsilon > 0$. Par densité des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe $v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $v_0(x) = 0$ pour $|x| \geq R$ telle que $\|v_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon/3$. Alors par l'inégalité triangulaire et le point (iv) on a

$$\begin{aligned}\|S(t)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\|v_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \qquad (6.10)\end{aligned}$$

On a que $(S(t)v_0 - v_0)(x) \to 0$ lorsque $t \downarrow 0$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ par la Proposition 1.21. De plus, $\|S(t)v_0\|_{L^\infty} \leq \|v_0\|_{L^\infty}$ par (1.14) et (4.14). Donc

$$\|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(B(0,2R))} \to 0 \qquad (6.11)$$

lorsque $t \to 0$ par convergence dominée. Pour $|x| \geq 2R$ on a en utilisant le support de v_0

$$\begin{aligned}|(S(t)v_0)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K(t, x-y)v_0(y)dy\right| \\ &= \left|\int_{|y|\leq R} K(t, x-y)v_0(y)dy\right| \\ &\leq \sup_{|y|\leq R} |K(t, x-y)| \int |v_0(y)|dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{(|x|-R)^2}{4t}} \int |v_0(y)|dy.\end{aligned}$$

On a que $e^{-\frac{(|x|-R)^2}{4t}} \leq e^{-\frac{|x|^2}{8t}}$ car $R \leq |x|/2$. De plus, il existe $C > 0$ telle que $e^{-z^2/8} \leq Cz^{-2n}$ pour tout $z > 0$. En combinant, on obtient que $e^{-\frac{(|x|-R)^2}{4t}} \leq C\frac{t^n}{|x|^{2n}}$. L'inégalité ci-dessus devient alors $|(S(t)v_0)(x)| \leq \frac{C' t^{\frac{n}{2}}}{|x|^{2n}}$ pour $C' = C(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int |v_0(y)|dy$. En utilisant cela et que $v_0(x) = 0$ pour $|x| \geq R$ on obtient

$$\|S(t)v_0 - v_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,2R))} \leq C' t^{\frac{pn}{2}} \int_{|x|\geq R} \frac{dx}{|x|^{2np}} \to 0 \qquad (6.12)$$

lorsque $t \downarrow 0$. En combinant (6.11) et (6.12) on obtient qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $0 < t \leq t_0$. En injectant cette inégalité dans (6.10) on obtient que $\|S(t)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon$. Cela démontre (6.9).

Soient maintenant $t, s \geq 0$. Alors en utilisant successivement (iii) et (iv) on a

$$\|S(t+s)u_0 - S(t)u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|S(t)(S(s)u_0 - u_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|S(s)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Par (6.9) on déduit donc que $\|S(t+s)u_0 - S(t)u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ tend vers 0 lorsque $s \to 0$ et ce uniformément pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela démontre le point (iv).

□

Nous allons maintenant définir ce qu'est un problème de Cauchy bien posé, notion introduite par Hadamard. Pour cela, les solutions doivent exister, être unique et dépendre continument de la donnée initiale.

Definition 6.2. *Un problème de Cauchy linéaire est bien posé dans un espace de Banach $\mathcal{B}$ (avec un espace auxiliaire Y), si pour tout $u_0 \in \mathcal{B}$, il existe une unique solution $u(t) \in C([0,\infty]) \cap Y$, et que pour tout $T > 0$, le flot $u_0 \mapsto u(t)$ est continu de $\mathcal{B}$ dans $C([0,T], \mathcal{B})$.*

Proposition 6.3. *Soit $Y = \{u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$, bornée sur $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ $\forall t_0 > 0\}$. Alors pour tout $1 \leq p < \infty$, le problème de Cauchy* (6.1) *(où la seconde équation est entendue au sens de* (6.3)*) est bien posé dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Soit u une solution avec $u \in C([0,\infty), L^p) \cap Y$. Pour $t_0 > 0$ on pose $u_{t_0}(t) = u(t_0 + t)$. Alors u est une solution C^∞ et bornée sur $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ de (1.10) avec $u_{t_0}(0) = u(t_0)$, donc par l'unicité de la proposition 1.2 on a $u_{t_0}(t) = K(t,\cdot) * u(t_0)$. Donc $u(t_0 + t) = K(t_0 + t) * u(t_0)$ pour $t, t_0 > 0$. Pour tout (t,x) fixé, on a alors

$$u(t+t_0,x) = \int K(t,y)u(t_0,x-y)dy + \int (K(t+t_0,y) - K(t))u(t_0,x-y)dy.$$

Lorsque $t_0 \to 0$, le premier terme converge vers $\int K(t,y)u_0(x-y)dy = S(t)u_0(x)$ par (6.3) et par convergence dominée, et le second terme converge vers 0 par Hölder car $\|K(t+t_0) - K(t)\|_{L^{p'}} \to 0$ et $\|u(t+t_0)\|_{L^p}$ est bornée. Donc $u = S(t)u_0$, d'où l'unicité.

Il reste à démontrer que $u(t) = S(t)u_0$ satisfait toutes les propriétés. Mais cela est une conséquence directe des propositions 6.2 et 6.1, et de (6.1) que nous démontrerons ci-après.

□

2. Comportement en temps long

Nous allons commencer par montrer des estimations de décroissance pour les solutions de l'équation de la chaleur. Si $u_0 \in L^p$ pour $1 \le p < \infty$, cela démontrera que les solutions convergent vers 0 dans L^∞.

LEMME 6.1. *Soit $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1,\infty]$, et $S(t)u$ la solution de l'équation de la chaleur correspondante. Alors pour tout $t > 0$ on a que $u(t,\cdot) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ pour tout $q \in [p,\infty]$ avec*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}\|u_0\|_{L^p}. \tag{6.13}$$

PROOF. Par l'inégalité de Young pour la convolution (4.14), on a

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \|K(t,\cdot) * u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \|K(t,\cdot)\|_{L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{6.14}$$

avec $\tilde{p} = \left(1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)^{-1}$. On calcule par (1.13) en effectuant le changement de variable $y = \sqrt{\tilde{p}}\frac{x}{\sqrt{t}}$ que

$$\begin{aligned}\|K(t,\cdot)\|^{\tilde{p}}_{L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)} &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\tilde{p}n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tilde{p}\frac{|x|^2}{4t}}dx \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\tilde{p}n}{2}}}\frac{t^{\frac{n}{2}}}{\tilde{p}^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4}}dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\tilde{p}n}{2}}}\frac{t^{\frac{n}{2}}}{\tilde{p}^{\frac{n}{2}}}(4\pi)^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\tilde{p}n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}\frac{1}{\tilde{p}^{\frac{n}{2}}} \end{aligned} \tag{6.15}$$

où l'on a utilisé que $1 - \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Comme $\frac{1}{\tilde{p}^{\frac{1}{\tilde{p}}}} \le 1$ et que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \ge 0$, alors $\|K(t,\cdot)\|_{L^{\tilde{p}}} \le 1$. En combinant cela et (6.14) on obtient (6.13).

□

Pour $u_0 \in L^1$ avec $u_0 \geq 0$, un calcule direct en utilisant Fubini donne que $\int u(t)dx = \int K(t,y)dy \int u_0(x)dx = \int u_0(x)dx$. Donc $u(t)$, si elle converge vers 0 dans L^∞ par (6.13), ne converge pas vers 0 dans L^1.

Nous allons maintenant montrer que les solutions de l'équation de la chaleur dans L^1 ressemblent à $K(t)$ lorsque $t \to \infty$. Elles deviennent ainsi auto-similaires à l'ordre principal.

THEOREME 6.1 (Résolution auto-similaire pour l'équation de la chaleur). *Pour tout $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on pose $M = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)dx$. Alors la solution u de l'équation de la chaleur se décompose en*

$$u = MK + v \tag{6.16}$$

où pour tout $1 \leq p \leq \infty$

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \qquad \textit{lorsque } t \to \infty. \tag{6.17}$$

Remark 6.2. On peut vérifier que $\|K(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C_p t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}$ pour une constante $C_p > 0$ par un changement de variable en utilisant (1.13). Si $M \neq 0$, la décomposition (6.16) et la borne (6.17) assurent donc que la taille de v dans L^p est négligeable par rapport à celle de K. La solution ressemble donc à $MK(t)$ en temps long.

PROOF. **Étape 1**. *Preuve si $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.* Soit $v = u(t) - MK(t)$. Alors puisque $u(t) = K(t) * u_0$ et $M = \int u_0$ on peut écrire

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(K(t,x-y) - K(t,x)\right) u_0(y)dy$$

On rappelle la formule $f(x+y) = f(x) + \int_0^1 y.\nabla f(x+sy)ds$. Donc

$$K(t,x-y) - K(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{s=0}^1 y.\frac{x-sy}{\sqrt{t}} e^{-\frac{|x-sy|^2}{4t}} dy.$$

On peut ainsi borner

$$|v(t,x)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{s=0}^1 \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \Psi\left(\frac{x-sy}{\sqrt{t}}\right) |y||u_0(y)|dy.$$

où $\Psi(z) = \frac{1}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}}|z|e^{-|z|^2/4}$. On remarque que la fonction Ψ est bornée par une constante $C > 0$. On peut donc majorer

$$|v(t,x)| \leq \frac{1}{t^{n/2+1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} C|y||u_0(y)|dy.$$

Donc $\|v\|_{L^\infty} \leq \frac{C_1}{t^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}$ pour une constante $C_1 > 0$. On peut également majorer par Fubini,

$$\|v\|_{L^1} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \int \frac{1}{t^{n/2}} \Psi(\frac{x}{\sqrt{t}})dx \int |y||u_0(y)|dy \leq \frac{C_0}{\sqrt{t}}$$

où l'on a utilisé que $\int \Psi < \infty$ et le changement de variable $x = \sqrt{t}\tilde{x}$. Par Hölder,

$$\|v\|_{L^p} \leq \|v\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{C_0^{\frac{1}{p}} C_1^{1-\frac{1}{p}}}{t^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}}.$$

D'où (6.17).

Étape 2. *Preuve dans le cas général.* Soit $u_0 \in L^1$. Soit $\epsilon > 0$. Par densité, il existe $\tilde{u}_0 \in C_c^\infty$ telle que $\int \tilde{u}_0 = M$ et $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1} \leq \epsilon/2$. Alors

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(t) - MK(t)\|_{L^p} \leq t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|\tilde{u}(t) - MK(t)\|_{L^p} + t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^p}$$

Le premier terme tend vers 0 lorsque $t \to \infty$ par l'étape 1. Quant au second, il est plus petit que $\epsilon/2$ car $\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^p} = \|S(t)(u_0 - \tilde{u}_0)\|_{L^p} \leq \frac{1}{t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}}\epsilon/2$ par (6.13). Donc $t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(t) - MK(t)\|_{L^p} \leq \epsilon$ pour t assez grand. D'oú (6.17).

$\square$

3. Exercices

Exercice 6.1. *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur définit dans la proposition 6.2. Montrer que $t \mapsto S(t)$ n'est pas une fonction continue à valeur dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ (avec $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ muni de la topologie usuelle des endomorphismes continus de $L^p(\mathbb{R}^n)$).*

Exercice 6.2. *Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$, pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a $\nabla(S(t)u) \in L^q(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t > 0$ avec*

$$\|\nabla(S(t)u)\|_{L^q} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{1}{2}}}\|u\|_{L^p}. \tag{6.18}$$

Exercice 6.3 (Estimations raffinées pour l'équation de la chaleur). *Pour $T > 0$ et $1 \leq q \leq \infty$ on définit $L^\infty([0,T], L^q(\mathbb{R}^n))$ comme l'espace des fonctions f mesurables sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ telles que la fonction $t \mapsto \|f(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ appartient à l'espace $L^\infty([0,T])$, et on définit*

$$\|f\|_{L^\infty([0,T],L^q(\mathbb{R}^n))} = \left\|t \mapsto \|f(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}\right\|_{L^\infty([0,T])}.$$

(1) *Montrer que $L^\infty([0,T], L^q(\mathbb{R}^3))$ équippé de sa norme est un espace de Banach.*

(2) *Soit $p \in [1,\infty)$, et $u_0 \in L^p$. Pour $p < q \leq \infty$ on pose $\alpha = \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. Montrer que*

$$\|t^\alpha S(t)u_0\|_{L^\infty([0,T],L^q(\mathbb{R}^n))} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

(3) *Sous les mêmes hypothèses, montrer que*

$$\lim_{T\to 0} \|t^\alpha S(t)u_0\|_{L^\infty([0,T],L^q(\mathbb{R}^n))} = 0$$

(Indication : montrer d'abord cette limite si $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$).

(4) *Montrer que cette limite n'est pas uniforme sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que*

$$\liminf_{T\to 0} \sup_{u_0\in L^p(\mathbb{R}^n),\ \|u_0\|_{L^p}=1} \|t^\alpha S(t)u_0\|_{L^\infty([0,T],L^q(\mathbb{R}^n))} > 0.$$

CHAPTER 7

L'equation de Burgers visqueuse

1. Résolution du problème de Cauchy et formule de Hopf-Cole

On s'intéresse à l'équation de Burgers à laquelle on ajoute un terme de dissipation :

$$\begin{cases} u_t + uu_x = u_{xx}, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Cette équation est non linéaire. Il existe une transformation (non linéaire) qui la ramène à l'équation linéaire de la chaleur.

Lemme 7.1 (Transformation de Hopf-Cole). *On a que $u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$ est une solution classique de*

$$u_t + uu_x = u_{xx} \tag{7.2}$$

si et seulement si il existe $c \in C^\infty((0,\infty))$ une fonction positive telle que la fonction

$$\phi(t,x) = c(t)\exp\left(-\frac{1}{2}U(t,x)\right), \quad \textit{où} \quad U(t,x) = \int_0^y u(t,y)dy, \tag{7.3}$$

satisfait $\phi \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$ et est une solution de l'équation de la chaleur

$$\phi_t = \phi_{xx}. \tag{7.4}$$

Proof. En primitivant, il vient que u satisfait (7.2) si et seulement si

$$\partial_t U + \frac{1}{2}(\partial_x U)^2 - \partial_x^2 U = \tilde{c}(t)$$

pour une constante d'intégration $\tilde{c}(t)$. En évaluant en 0 et en utilisant que $U(x) = \int_0^x u(y)dy$ on trouve $\tilde{c}(t) = \frac{1}{2}u^2(t,0) - \partial_x u(t,0)$ qui est donc une fonction C^∞. En différentiant, on a que $\phi(t,x) = c(t)\exp(-\frac{1}{2}U(t,x))$ satisfait (7.4) si et seulement si

$$0 = \partial_t\phi - \partial_x^2\phi = -\frac{c(t)}{2}\exp(-\frac{1}{2}U)\left(\partial_t U + \frac{1}{2}(\partial_x U)^2 - \partial_x^2 U - \frac{c'(t)}{c(t)}\right).$$

D'où l'équivalence entre les deux équations (7.2) et (7.4) pour le choix $c(t) = \exp(\int_{t_0}^t \tilde{c}(s)ds)$ pour un $t_0 > 0$.

□

Afin d'utiliser le lemme 7.1 pour résoudre (7.1) on définit

$$U_0(x) = \int_0^x u(y)dy \qquad \text{et} \qquad \phi_0(x) = \exp(-\frac{1}{2}U_0(x)).$$

Lemme 7.2. *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique solution classique de (7.4) sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ à croissance au plus exponentielle telle que $\phi \in C([0,\infty)\times\mathbb{R})$ et $\phi(0,\cdot) = \phi_0$. De plus, celle-ci s'écrit*

$$\phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}U_0(x-y) - \frac{y^2}{4t}\right)dy.$$

Proof. Par les propositions 1.2 et 1.1, la solution de (7.4) satisfaisant les propriétés du lemme est unique et est donnée par

$$\tilde{\phi}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}_0(x-y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy.$$

Cela montre le résultat en utilisant que $\phi_0 = \exp(-\frac{1}{2}U_0(x))$.

□

Theoreme 7.1 (Résolution du problème de Cauchy pour l'équation de Burgers visqueuse). *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Il existe une unique fonction* $u \in \mathcal{C}^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}) \cap L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}))$ *avec* $u(t,x) \to u_0(x)$ *lorsque* $t \downarrow 0$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$ *qui est une solution classique de l'équation de Burgers visqueuse* (7.1) *sur* $(0,\infty)\times\mathbb{R}$. *De plus, celle-ci s'écrit*

$$u(t,x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u_0(y) \exp\left(-\frac{1}{2}U_0(y) - \frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}U_0(y) - \frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy}. \tag{7.5}$$

Proof. En différentiant l'identité (7.3) on trouve

$$u = U_x = -2\frac{\phi_x}{\phi}.$$

En combinant les lemmes 7.1 et 7.2 et la condition au temps initial $t=0$, une telle solution u est effectivement nécéssairement donnée par la formule (7.5).

On vérifie alors par Hölder que

$$|u(t,x)| \leq \frac{\|u_0\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}U_0(y) - \frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}U_0(y) - \frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$$

et donc $u \in L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Il reste à vérifier que $u(t,x) \to u_0(x)$ lorsque $t \downarrow 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $u = \frac{\phi_x}{\phi}$, et que ϕ est continue par le lemme 7.2, il suffit de montrer que

$$\phi_x(t,x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{1}{2}U_0(y)} \frac{1}{\sqrt{\pi 4t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \to u_0(x) e^{-\frac{1}{2}U_0(x)}$$

lorsque $t \downarrow 0$ pour presque tout x. Cela est alors une conséquence de la proposition 6.1.

□

2. Symétries et solutions auto-similaires

En effectuant des calculs très similaires à ceux de la preuve du lemme 3.1 on constate que l'équation de Burgers visqueuse (7.2) possède les propriétés de symétries suivantes. Si u est une solution, alors pour tout $(\lambda, c, x_0, t_0) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^3$,

$$\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t-t_0}{\lambda^2}, \frac{x-ct-x_0}{\lambda}\right) + c$$

est aussi une solution de (7.1).

Si une solution u est invariante par la transformation d'échelle

$$u(t,x) = \frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}\right) \qquad \text{pour tout } (\lambda,t,x) \in (0,\infty)^2 \times \mathbb{R}$$

alors nécessairement celle-ci est de la forme

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{7.6}$$

(en prenant $\lambda = \sqrt{t}$ dans et en posant $\Psi(y) = u(1,y)$). En supposant $\Psi \in C^2(\mathbb{R})$ on a que u de la forme (7.6) est une solution de l'équation de Burgers visqueuse (7.1) si et seulement si Ψ est solution de

$$-\frac{y}{2}\Psi' - \frac{1}{2}\Psi + \Psi\Psi' = \Psi''. \tag{7.7}$$

On l'appelle *équation stationnaire des solutions auto-similaires* de l'équation de Burgers visqueuse.

LEMME 7.1 (Profils auto-similaires expanseurs). *Pour tout $M \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$\Psi_M(y) = \frac{c_M e^{-\frac{y^2}{4}}}{1 - \frac{c_M}{2}\int_0^y e^{-\frac{z^2}{4}}dz}, \tag{7.8}$$

où $c_M = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\tanh(\frac{M}{4})$, est une solution de (7.7). De plus, $\int_{\mathbb{R}}\Psi = M$.

Ces solutions sont uniques, au sens où si $\Psi \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est une solution de (7.7) alors $\Psi = \Psi_M$ pour un $M \in \mathbb{R}$.

On a donc une famille de solutions auto-similaires de l'équation de Burgers visqueuse (7.1) sous la forme

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\Psi_M\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

PROOF. On raisonne par analyse-synthèse. Soit $\Psi \in C^2(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ une solution de (7.7). On pose $M = \int_{\mathbb{R}}\Psi(y)dy$. En réécrivant (7.7) sous la forme

$$\left(-\Psi' - \frac{y}{2}\Psi + \frac{1}{2}\Psi^2\right)' = 0,$$

on remarque qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$-\Psi' - \frac{y}{2}\Psi + \frac{1}{2}\Psi^2 = c. \tag{7.9}$$

On utilise à nouveau la transformation de Cole-Hopf, en posant $\Phi(y) = \exp(-\frac{1}{2}\int_0^y \Psi(x)dx)$. Puisque $\Psi \in L^1$, on a que

$$\frac{1}{N} \leq \Phi \leq N \tag{7.10}$$

pour $N = \exp(\frac{1}{2}\int|\Psi(y)|dy)$. On calcule alors que $\Psi = -2\frac{\Phi'}{\Phi}$ et $\Psi' = -2\frac{\Phi''}{\Phi} + 2\frac{\Psi'^2}{\Psi^2}$. En injectant dans (7.9) l'équation devient

$$\Phi'' + \frac{y}{2}\Phi' = \frac{c}{2}\Phi. \tag{7.11}$$

Pour montrer que $c = 0$, on intègre (7.11) entre 0 et un grand nombre Y, ce qui permet d'exprimer c comme :

$$\begin{aligned} c &= \frac{2}{\int_0^Y \Phi(y)dy}\left(\Phi'(Y) - \Phi'(0) + \int_0^Y \frac{y}{2}\Phi'\right) \\ &= \frac{2Y}{\int_0^Y \Phi(y)dy}\left(-\frac{\Psi(Y)\Phi(Y)}{2Y} + \frac{\Psi(0)\Phi(0)}{2Y} - \frac{1}{2}\int_0^Y \frac{y}{2Y}\Psi(y)\Phi(y)dy\right). \end{aligned}$$

Par (7.10) on a que $\frac{2Y}{\int_0^Y \Phi(y)dy} \leq 2N$. Puisque $\Psi \in L^1$ on a qu'il existe $Y_n \to \infty$ telle que $\Psi(Y_n) \to 0$. Puisque $\Psi \in L^1$ et $\frac{y}{Y_n} \to 0$, lorsque $n \to \infty$ on a que $\int_0^Y \frac{y}{Y_n}\Psi(y)\Phi(y)dy \to 0$ par convergence dominée. En prenant $Y = Y_n$ dans l'identité ci-dessus et en laissant n tendre vers ∞ on obtient donc

$$c = 0.$$

L'équation (7.11) devient alors

$$\Phi'' + \frac{y}{2}\Phi' = 0.$$

Deux solutions particulières sont $\Phi_1 = 1$ et $\Phi_2 = \int_0^y e^{-\frac{z^2}{4}}dz$. Puisque c'est une équation différentielle linéaire du second ordre, on a alors $\Phi(y) = c_1 + c_2\int_0^y e^{-\frac{z^2}{4}}dz$ pour deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Puisque $\Phi(0) = \exp(0) = 1$ on trouve $c_1 = 1$. Puisque

$$\frac{\Phi(y)}{\Phi(-y)} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^y \Psi(x)dx\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{-y} \Psi(x)dx\right)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} \Psi(x)dx\right)$$

on a que $\lim_{y\to\infty}\frac{\Phi(y)}{\Phi(-y)} = \exp\left(-\frac{M}{2}\right)$. En utilisant que $\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{4}}dy = \sqrt{\pi}$ on obtient $1 + c_2\sqrt{\pi} = e^{-\frac{M}{2}}(1 - c_2\sqrt{\pi})$ et on trouve donc

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{M}{2}} - 1}{e^{-\frac{M}{2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\tanh(-\frac{M}{4}) = -\frac{c_M}{2}.$$

Donc

$$\Phi(y) = 1 - \frac{c_M}{2}\int_0^y e^{-\frac{z^2}{4}}dz.$$

En inversant la transformation de Cole-Hopf, $\Psi = -\frac{2\Phi'}{\Phi}$ on obtient

$$\Psi(y) = \frac{c_M e^{-\frac{y^2}{4}}}{1 - \frac{c_M}{2}\int_0^y e^{-\frac{z^2}{4}}dz}.$$

On peut maintenant faire la synthèse et vérifier que Ψ donnée par cette formule convient. On a effectivement $\Psi \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. De plus, $\Phi = 1 - \frac{c_M}{2}\int_0^y e^{-\frac{z^2}{4}}dz$ est bien une solution de (7.11) pour $c = 0$, et donc Ψ est bien une solution de (7.9), ce qui en différentiant montre que Ψ est une solution de (7.7).

$\square$

3. Résolution auto-similaire en temps long

THEOREME 7.1. *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et u la solution correspondante de l'équation de Burgers visqueuse (7.1) donnée par la proposition 7.1, et soit $M = \int_{\mathbb{R}} u_0(y)dy$ la masse de sa donnée initiale. Alors u se décompose en temps grand sous la forme*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\Psi_M(\frac{x}{\sqrt{t}}) + v(t,x) \tag{7.12}$$

avec pour tout $p \in [1,\infty]$

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|v(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \tag{7.13}$$

lorsque $t \to \infty$.

Remark 7.2. Par un changement de variable, on a $\|\frac{1}{\sqrt{t}}\Psi(\frac{x}{\sqrt{t}})\|_{L^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}}\|\Psi\|_{L^p(\mathbb{R})}$. L'identité (7.12) et la borne (7.13) assurent donc que u est égal à l'ordre principal à $\frac{1}{\sqrt{t}}\Psi(\frac{x}{\sqrt{t}})$ et que v est un reste d'ordre inférieur.

Remark 7.3. Pour des données initiales qui convergent vers des constantes en $+\infty$ et $-\infty$, la solution ne converge plus vers le profil auto-similaire précédent mais elle converge vers une onde progressive (qui est une autre forme d'auto-similarité). Voir les exercices.

Proof. **Étape 1**. *Mise en place de la transformation de Cole-Hopf.* On applique la transformation de Cole-Hopf (7.3) et on obtient

$$u = -\frac{2\phi_x}{\phi} \tag{7.14}$$

où ϕ est la solution de l'équation de la chaleur $\phi_t = \phi_{xx}$ de donnée initiale

$$\phi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x u_0(y)dy\right). \tag{7.15}$$

Comme $-\|u_0\|_{L^1} \leq \int_0^x u_0(y)dy \leq \|u_0\|_{L^1}$ on a

$$\frac{1}{N} \leq \phi \leq N \tag{7.16}$$

pour $N = e^{\|u_0\|_{L^1}/2}$. On constate de par la formule (7.8) que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{t}}\Psi_M\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{c_M e^{-\frac{x^2}{4t}}}{1-\frac{c_M}{2}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{z^2}{4}}dz}\\ &= -\frac{2\partial_x\phi_M}{\phi_M}\end{aligned} \tag{7.17}$$

pour

$$\phi_M(t,x) = 1 - \frac{c_M}{2}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{z^2}{4}}dz. \tag{7.18}$$

En utilisant $c_M = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1-e^{-\frac{M}{2}}}{1+e^{-\frac{M}{2}}}$, on vérifie qu'il existe $N' > 0$ tel que

$$\frac{1}{N'} \leq \phi_M \leq N' \tag{7.19}$$

Étape 2. *Convergence pour la dérivée de la transformation de Cole-Hopf.* En différentiant l'équation $\phi_t = \phi_{xx}$, on a que ϕ_x est la solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t\phi_x = \partial_{xx}\phi_x, \\ \phi_x(0,x) = -\frac{1}{2}u_0(x)\phi_0(x). \end{cases} \tag{7.20}$$

Puisque $\phi_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ par (7.24) et $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\phi_x \in L^1(\mathbb{R})$. De plus, on calcule sa masse en utilisant (7.15) :

$$m = \int_{\mathbb{R}} \phi_x(0,x) = \lim_{y\to\infty}\phi_0(y) - \lim_{y\to-\infty}\phi_0(y) = e^{-\frac{U_0^+}{2}} - e^{-\frac{U_0^-}{2}}$$

où l'on a posé $U_0^+ = \int_0^\infty u_0(y)dy$ et $U_0^- = -\int_{-\infty}^0 u_0(y)dy$. En appliquant d'une part les inégalités de décroissance (6.13) pour l'équation de la chaleur (7.20) on a pour tout $p \in [1,\infty]$

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|\phi_x(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{1,p}\|\partial_x\phi_0\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{7.21}$$

En appliquant d'autre part le théorème 6.1 de résolution auto-similaire en temps long pour l'équation de la chaleur (7.20) on a

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\left\|\phi_x(t,\cdot)-\frac{m}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\to 0 \qquad \text{quand } t\to\infty. \tag{7.22}$$

Or, on calcule par (7.18) que

$$\partial_x\phi_M(t,x)=-\frac{c_M}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

L'inégalité de convergence (7.22) s'écrit donc

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\left\|\partial_x\left(\phi(t,\cdot)+\kappa\phi_M(t,\cdot)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\to 0 \qquad \text{quand } t\to\infty \tag{7.23}$$

pour la constante $\kappa=\frac{m}{\sqrt{\pi}c_M}$.

Étape 3. *Convergence pour la transformation de Cole-Hopf.* Par le théorème fondamental de l'analyse

$$\phi(t,x)+\kappa\phi_M(t,x)=\phi(t,0)+\kappa\phi_M(t,0)+\int_0^x\left(\partial_x\phi(t,y)+\kappa\partial_x\phi_M(t,y)\right)dy.$$

On a $|\int_0^x(\partial_x\phi+\kappa\partial_x\phi_M)\,dy|\le\|\partial_x\phi+\kappa\partial_x\phi_M\|_{L^1(\mathbb{R})}\to 0$ lorsque $t\to\infty$ par (7.23) pour $p=1$. Donc

$$\phi(t,\cdot)+\kappa\phi_M(t,\cdot)\to\phi(t,0)+\kappa\phi_M(t,0) \qquad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}) \text{ lorsque } t\to\infty.$$

On calcule alors par (7.18) que $\phi_M(t,0)=1$, et par (1.21) que

$$\begin{aligned}\phi(t,0)&=\int_{\mathbb{R}}\phi_0(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{y^2}{4t}}\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}}\phi_0(\sqrt{t}z)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^0\phi_0(\sqrt{t}z)e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\phi_0(\sqrt{t}z)e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz.\end{aligned}$$

On a pour $z>0$ que $\phi_0(\sqrt{t}z)=\exp(-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{t}z}u_0)\to\exp(-\frac{1}{2}\int_0^\infty u_0)=e^{-\frac{U_0^+}{2}}$ lorsque $t\to\infty$. De manière similaire, si $z<0$ alors $\phi_0(\sqrt{t}z)\to e^{-\frac{U_0^-}{2}}$ lorsque $t\to\infty$. Par convergence dominée, on obtient alors

$$\begin{aligned}\phi(t,0)&\to\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{U_0^-}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{U_0^+}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz\\&=\frac{e^{-\frac{U_0^-}{2}}+e^{-\frac{U_0^+}{2}}}{2}\end{aligned}$$

où on a utilisé $\int_0^\infty e^{-x^2/4}dx=\sqrt{\pi}$. On en déduit que lorsque $t\to\infty$

$$\phi(t,0)+\kappa\phi_M(t,0)\to\frac{e^{-\frac{U_0^-}{2}}+e^{-\frac{U_0^+}{2}}}{2}+\kappa=0$$

(on vérifie effectivement que $\frac{e^{-\frac{U_0^-}{2}}+e^{-\frac{U_0^+}{2}}}{2}+\kappa=0$ en utilisant que $U_0^+-U_0^-=M$, $\kappa=\frac{m}{\sqrt{\pi}c_M}$, $m=e^{-\frac{U_0^+}{2}}-e^{-\frac{U_0^-}{2}}$ et $c_M=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1-e^{-\frac{M}{2}}}{1+e^{-\frac{M}{2}}}$). Donc

$$\|\phi(t,\cdot)+\kappa\phi_M(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\to 0 \qquad \text{lorsque } t\to\infty. \tag{7.24}$$

Étape 4. *Convergence pour l'équation de Burgers visqueuse.* Soit $v(t,x) = u(t,x) - \frac{1}{\sqrt{t}}\Psi(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Alors par (7.14) et (7.17)

$$v = -2\frac{\phi_x}{\phi} + 2\frac{\partial_x \phi_M}{\phi_M}.$$

Par (7.24) et (7.19) on a

$$\|v\|_{L^p} \leq \frac{NN'}{\kappa}\|\kappa\phi\phi_M v\|_{L^p} = C\|\kappa\phi_M\phi_x - \kappa\phi\partial_x\phi_M\|_{L^p}.$$

On décompose alors $\kappa\phi_M\phi_x - \kappa\phi\partial_x\phi_M = (\kappa\phi_M - \phi)\phi_x + \phi(\phi_x - \kappa\partial_x\phi_M)$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Hölder, et les estimations de convergence (7.21), (7.23) et (7.24) pour ϕ et ϕ_x:

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|v\|_{L^p} &\leq Ct^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|(\kappa\phi_M - \phi)\phi_x\|_{L^p} + Ct^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|\phi(\phi_x - \kappa\partial_x\phi_M)\|_{L^p} \\ &\leq C\|\kappa\phi_M - \phi\|_{L^\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|\phi_x\|_{L^p} + C\|\phi\|_{L^\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|\phi_x - \kappa\partial_x\phi_M)\|_{L^p} \\ &\to 0 \qquad \text{lorsque } t \to \infty. \end{aligned}$$

Cela démontre le théorème.

□

4. Exercices

Exercice 7.1. *1. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ une solution de l'équation de Burgers visqueuse* (7.1)*. Montrer que u est invariant par la symétrie de translation*

$$u(t,x) = u(t+s, x+cs) \qquad \forall (t,x,s) \in \mathbb{R}^3$$

si et seulement si $u(t,x) = W(x-ct)$ pour une fonction $W \in C^2(\mathbb{R})$ solution de

$$cW' + WW' = W''. \tag{7.25}$$

2. Montrer que pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $e^{-c_1(x-c_1t)} + e^{-c_2(x-c_2t)}$ est solution de l'équation de la chaleur $\phi_t = \phi_{xx}$.

3. Déduire de la question précédente en utilisant la transformation de Cole-Hopf que pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ avec $c_2 > c_1$,

$$u(t,x) = W_{c_1,c_2}(x-ct)$$

avec

$$W_{c_1,c_2}(y) = \frac{2c_1 e^{\frac{c_2-c_1}{2}y} + 2c_2 e^{\frac{c_1-c_2}{2}y}}{e^{\frac{c_2-c_1}{2}y} + e^{\frac{c_1-c_2}{2}y}}, \qquad c = c_1 + c_2$$

est une solution de l'équation de Burgers visqueuse.

4. Déduire des questions précédentes que pour tout $c \in \mathbb{R}$, W_{c_1,c_2} est une solution de (7.25)*. Montrer que celle-ci satisfait de plus :*

$$\lim_{y\to\infty} W_{c_1,c_2}(y) = 2c_1, \qquad \lim_{y\to-\infty} W_{c_1,c_2}(y) = 2c_2.$$

5. Soit $u_0 \in L^\infty$ telle qu'il existe deux constantes c_1, c_2 avec $c_2 > c_1$, et un nombre $R > 0$ tel que $u_0(x) = 2c_2$ pour tout $x < -R$ et $u_0(x) = 2c_1$ pour tout $x > R$. Montrer, en utilisant les questions précédentes, la transformation de Cole-Hopf, et l'inégalité 6.13, qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot) - W_{c_1,c_2}(\cdot - ct - x_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Remark 7.1. Cet exercice fait apparaître de nouvelles solutions particulières qui sont appelées les *ondes progressives.* C'est un nouvel exemple d'auto-similarité exacte. L'équation (7.25) s'appelle *l'équation stationnaire des ondes progressives.*

Le résultat de la question 5. montre que les onde progressives apparaissent comme les attracteurs universels pour des données initiales constantes en dehors d'un compact. Ce résultat est à mettre en regard du théorème 7.1 qui assure que les données initiales dans L^1 sont attirées vers un profil auto-similaire expanseur. Le comportement asymptotique des solutions est donc *fortement lié à l'espace fonctionnel.*

CHAPTER 8

Solutions faibles de l'équation de Burgers

Explication continuation apres singularite. explication donnees initiales singulieres. explication solutions faibles.

1. Solutions entropiques

1.1. Solutions au sens des distributions. Supposons que $u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$ est une solution classique de l'équation de Burgers (3.1) (i.e. l'équation est satisfaite en tout point $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}$). Pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$, en multipliant l'équation par φ, puis en intégrant par parties on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\varphi dtdx + \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \frac{\partial(u^2)}{\partial x}\varphi dtdx \qquad (8.1)\\ &= -\iint_{\mathbb{R}} u(t=0)\varphi(t=0)dtdx - \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} u\frac{\partial\varphi}{\partial t}dtdx - \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}dtdx \end{aligned}$$

En utilisant que $u(t=0) = u_0$ on obtient alors la relation

$$\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u\partial_t\varphi + \frac{1}{2}u^2\partial_x\varphi\right) dtdx = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)dx. \qquad (8.2)$$

On remarque que l'on peut donner un sens à cette égalité même pour des fonctions qui ne sont pas différentiables.

DEFINITION 8.1 (Solutions au sens des distributions). *On dit que $u \in L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$ est une solution au sens des distributions de l'équation de Burgers* (3.1) *si l'identité* (8.2) *est satisfaite pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$.*

Le lemme ci-dessous montre que les deux notions de solutions classiques et de solution au sens des distributions coïncident pour des fonctions C^1. La notion de solution au sens des distributions est donc un affaiblissement de la notion de solution classique, d'où la terminologie de solution faible.

LEMME 8.1. *Soit $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R})$ avec $u \in L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Alors u est une solution classique de l'équation de Burgers* (3.1) *si et seulement si c'est une solution au sens des distributions.*

PROOF. Sens direct. Par le calcul menant à (8.2), toute solution $C^1 \cap L^\infty$ classique est une solution au sens des distributions.

Sens indirect. Soit u une solution au sens des distributions. On va d'abord montrer que $u(0,x) = u_0(x)$ en prenant des fonctions test φ bien choisies dans (8.2). Pour $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ on considère la fonction test $\varphi(t,x) = \psi(x)\chi(t/\tau)$ où $\chi \in C_c^\infty([0,\infty))$ satisfait $\chi(0) = 1$ et $\chi(s) = 0$ pour $s \geq 1$, et $1 \geq \tau > 0$. On calcule alors chaque terme dans (8.2). Pour le premier,

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} u\partial_t\varphi dtdx &= \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} u(0,x)\psi(x)\frac{1}{\tau}\chi'(\frac{t}{\tau})dtdx \\ &+ \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} (u(t,x)-u(0,x))\psi(x)\frac{1}{\tau}\chi'(\frac{t}{\tau})dtdx \\ &= I + II. \end{aligned} \tag{8.3}$$

En utilisant que $\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\chi'(\frac{t}{\tau})dt = -\chi(0) = -1$ par les propriétés de χ,

$$I = -\int_{\mathbb{R}} u(0,x)\psi(x)dx. \tag{8.4}$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour x dans le support de ψ et $0 \le t \le 1$, on a $|u(t,x) - u(0,x)| \le \int_0^t |\partial_t u(s,x)|ds \le Ct$. Donc

$$|II| \le C \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} |\psi(x)|\frac{t}{\tau}|\chi'(\frac{t}{\tau})|dtdx = C\tau \int_{\mathbb{R}} \psi dx \int_{[0,\infty)} s\chi'(s)ds \to 0 \tag{8.5}$$

lorsque $\tau \to 0$. Pour le second terme dans (8.2),

$$\begin{aligned}\left|\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} u^2\partial_x\varphi dtdx\right| &= \left|\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} u^2\partial_x\psi\chi(\frac{t}{\tau})dtdx\right| \\ &\le \|u\|_{L^\infty}^2 \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} |\partial_x\psi||\chi(\frac{t}{\tau})|dtdx \\ &= \|u\|_{L^\infty}^2 \tau \int_{[0,\infty)} |\chi(s)|ds \int |\partial_x\psi|dx \ \to 0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

lorsque $\tau \to 0$. En injectant (8.3), (8.4), (8.5) et (8.6) et $\varphi(0,x) = \psi(x)$ dans (8.2) et en passant à la limite $\tau \to 0$, on obtient

$$-\int_{\mathbb{R}} u(0,x)\psi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\psi(x)dx.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, alors $u(0,x) = u_0(x)$.

Alors en répétant le calcul (8.2) on a $\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \varphi(\frac{\partial u}{\partial t} + u\partial_x u)dtdx = 0$ pour toute fonction test φ. Donc $\frac{\partial u}{\partial t} + u\partial_x u = 0$. Donc u est bien une solution classique de l'équation de Burgers (3.1).

□

1.2. Solutions entropiques. On va constater par l'exercice 8.1 ci-dessous que pour une même donnée initiale u_0, il peut y avoir deux solutions au sens des distributions. Cela n'est pas satisfaisant d'un point de vue physique car, l'équation étant déterministe, on souhaiterait avoir unicité. On ajoute donc la condition supplémentaire, dite "d'entropie", qui nous permettra d'établir l'existence et l'unicité de solutions ultérieurement. Ce nom provient d'une analogie avec l'entropie physique.

EXERCICE 8.1. ***1.*** *Montrer que la fonction*

$$u_1(t,x) = \mathbb{1}(x \le \frac{t}{2})$$

est une solution de l'équation de Burgers au sens des distributions.

2. *Montrer que les fonctions*

$$u_2(t,x) = \mathbb{1}(x \ge \frac{t}{2})$$

et

$$u_3(t,x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0, \\ \frac{x}{t} & si\ 0 \le x \le t, \\ 1 & si\ x \ge t \end{cases}$$

sont des solution de l'équation de Burgers au sens des distributions.

3. Quelles sont les données initiales des fonctions u_1, u_2, et u_3 ? En déduire qu'il n'y a pas unicité pour les solutions au sens des distributions.

Remark 8.1. La solution u_1 de l'exercice 8.1 est appelée une onde de choc. La solution u_3 est appelée une onde de raréfaction. Nous verrons que la solution u_2 n'est pas une bonne solution : ce n'est pas une solution entropique.

DEFINITION 8.2 (Solutions entropiques). *On dit que $u \in L^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$ est une solution entropique de l'équation de Burgers* (3.1) *si c'est une solution au sens des distributions, et si de plus il existe $C > 0$ telle que*

$$u(t,x+z) - u(t,x) \le Cz(1+\frac{1}{t}) \tag{8.7}$$

pour presque tous $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$ et $z > 0$.

L'intuition mathématique est que l'on souhaite que les solutions aient une propriété de monotonie : seuls des sauts négatifs de gauche à droite en espace sont permis. Un tel saut représente le fait que les particules à gauche de la discontinuité, avançant à une vitesse plus rapide, rattrapent celles à droite. C'est la solution u_1 de l'exercice 8.1. En revanche, un saut positif est interdit : si un tel saut est présent sur la donnée initiale, alors des particules de vitesse intermédiaire sont crées instantanément pour $t > 0$. C'est pourquoi u_3 dans l'exercice 8.1 est une solution entropique, mais pas u_2.

2. Existence par viscosité évanescente et formule de Lax-Oleinik

Nous allons mettre en oeuvre la construction de solutions faibles par la méthode de viscosité évanescente. Pour cela, on approxime l'équation (3.1) par la même équation augmentée d'un faible effet dissipatif :

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \frac{\epsilon}{2} u_{xx}, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8.8}$$

avec $\epsilon > 0$ petit. On va démontrer que les solutions de cette nouvelle équation (8.8) ont une limite lorsque la viscosité disparaît $\epsilon \to 0$. Cela permettra d'obtenir par passage à la limite pour (3.1) des solutions entropiques, qui seront définies pour tout temps $t > 0$, et pour des données initiales avec de potentielles singularités.

2.1. Résolution du problème de Cauchy pour l'équation avec faible viscosité. On remarque que u est une solution de (8.8) si et seulement si $v(t,x) = u(\frac{\epsilon}{2}t, \frac{\epsilon}{2}x)$ est une solution

$$\begin{cases} v_t + vv_x = v_{xx}, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ v(0,x) = u_0(\frac{\epsilon}{2}x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8.9}$$

On peut donc résoudre (8.8) en utilisant les résultats du chapitre précédent.

LEMME 8.1. *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap L^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}))$ avec $u(t,x) \to u_0(x)$ lorsque $t \downarrow 0$ pour presque* *tout $x \in \mathbb{R}$ qui est une solution classique de l'équation de Burgers visqueuse* (8.8) *sur* $(0,\infty)\times\mathbb{R}$. *De plus, celle-ci s'écrit*

$$u(t,x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u_0(y)\exp\left(-\frac{1}{\epsilon}U_0(y) - \frac{(x-y)^2}{2\epsilon t}\right)dy}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}U_0(y) - \frac{(x-y)^2}{2\epsilon t}\right)dy}. \tag{8.10}$$

Proof. L'unique solution de (8.9) est donnée par le théorème 7.1, et s'écrit

$$v(t,x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u_0(\frac{\epsilon}{2}y)\exp\left(-\frac{1}{\epsilon}U_0(\frac{\epsilon}{2}y) - \frac{(x-y)^2}{4t}\right)dy}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}U_0(\frac{\epsilon}{2}y) - \frac{(x-y)^2}{4t}\right)dy}.$$

On obtient alors (8.10) en utilisant que $u(t,x) = v(\frac{2}{\epsilon}t, \frac{2}{\epsilon}x)$ et en effectuant un changement de variable dans les intégrales.

□

2.2. Analyse de la limite de viscosité évanescente. On remarque que l'identité (8.10) peut s'écrire

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y)d\mu_{\epsilon,t,x}(y)$$

où

$$d\mu_{\epsilon,t,x}(y) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi_{t,x}(\tilde{y})}d\tilde{y}} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi_{t,x}(y)}dy$$

avec

$$\Psi_{t,x}(y) = U_0(y) + \frac{1}{2t}(x-y)^2. \tag{8.11}$$

Sous cette forme, la fonction Ψ est appelée *phase*. Pour tout t,x fixés, la mesure $\mu_{\epsilon,t,x}(y)$ va se concentrer autour des points où la phase $\Psi_{t,x}$ est minimale. Le résultat suivant est appelé un résultat de *phase stationnaire*.

Lemme 8.2 (Phase stationnaire). *Soit $\Psi \in C(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Psi(x) \to \infty$ lorsque $|x| \to \infty$ et $e^{-\Psi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et telle que Ψ atteigne un unique minimum global en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $f \in C(\mathbb{R}^d)$ bornée on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi(x)}dx} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi(x)}dx \to f(x_0)$$

Proof. Pour tout $\delta > 0$, il existe $\eta(\delta) > 0$ tel que $\Psi(x) \leq \Psi(x_0) + \delta$ pour $|x-x_0| \leq \eta$. On note alors $m(\delta) = \min_{|x-x_0|\geq\delta} \Psi(x) > \Psi(x_0)$. On décompose

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}dx = \underbrace{\int_{|x-x_0|\leq\eta} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}dx}_{I} + \underbrace{\int_{|x-x_0|\geq\eta} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}dx}_{II}.$$

Le premier terme est

$$I \geq e^{-\frac{\delta}{\epsilon}}\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta)).$$

Le second terme est

$$II \leq e^{-\frac{(1-\epsilon)(m(\delta)-\Psi(x_0))}{\epsilon}} \int e^{-\Psi(x)-\Psi(x_0)}. \tag{8.12}$$

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}} \geq e^{-\frac{\delta}{\epsilon}}\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))$ pour tout $\delta > 0$. En combinant cette inégalité pour un δ' avec l'estimation pour le second terme (8.12)

$$\frac{\int_{|x-x_0|\geq\eta} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}} \leq e^{\frac{\delta'-(1-\epsilon)(m(\delta)-\Psi(x_0))}{\epsilon}} \frac{\int e^{-\Psi(x)-\Psi(x_0)}}{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta(\delta')))} \to 0 \tag{8.13}$$

en choisissant δ' suffisament petit en fonction de δ. Cela implique

$$\frac{\int_{|x-x_0|<\eta} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}} = 1 - \frac{\int_{|x-x_0|\geq\eta} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\Psi(x)-\Psi(x_0)}{\epsilon}}} \to 1. \tag{8.14}$$

On décompose alors

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi(x)}}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi(x)}} = f(x_0) + \frac{\int_{|x-x_0|\leq\eta}(f(x)-f(x_0))e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi(x)}}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi(x)}} + \frac{\int_{|x-x_0|>\eta}(f(x)-f(x_0))e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi(x)}}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi(x)}}$$

En utilisant la continuité de f en x_0 et (8.13) le deuxième terme tend vers 0 lorsque η tend vers 0. En utilisant que f est bornée et (8.13) le troisième terme tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0. D'où le résultat du lemme.

□

LEMME 8.3. *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour presque tout $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ la fonction $\Psi_{t,x}$ atteint un unique minimum en un point $Y(t,x)$. De plus, pour chaque $t \in [0,\infty)$, la fonction Y est croissante et a un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.*

Soit $u_{0,n} \in L^\infty(\mathbb{R})$ est une suite de fonctions bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et qui converge vers u_0 dans L^1 sur tout compact. Alors Y_n converge vers Y presque surement sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

PROOF. Pour chaque $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\Psi_{t,x}$ tend vers ∞ à l'infini, donc son minimum est bien défini. On pose

$$I_{t,x} = \{y \in \mathbb{R},\ \Psi_{t,x}(y) = \min_{z\in\mathbb{R}} \Psi_{t,x}(z)\}$$

qui est un ensemble compact, et $Y_-(t,x) = \min(I_{t,x})$ et $Y_+(t,x) = \max(I_{t,x})$. Soient $x_1 < x_2$ et $y < Y_+(t,x_1)$. Par définition de $Y_+(t,x_1)$ on a

$$\begin{aligned}
&\Psi_{t,x_2}(y) - \Psi_{t,x_2}(Y_+(t,x_1))\\
&= \Psi_{t,x_2}(y) - \Psi_{t,x_1}(y) + \Psi_{t,x_1}(y) - \Psi_{t,x_1}(Y_+(t,x_1)) + \Psi_{t,x_1}(Y_+(t,x_1)) - \Psi_{t,x_2}(Y_+(t,x_1))\\
&= \frac{1}{2t}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2y) + \Psi_{t,x_1}(y) - \Psi_{t,x_1}(Y_+(t,x_1)) - \frac{1}{2t}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2Y_+(t,x_1))\\
&\geq \frac{1}{t}(x_2-x_1)(Y_+(t,x_1)-y)\ > 0.
\end{aligned}$$

Donc $\Psi_{t,x_2}(y) > \Psi_{t,x_2}(Y_+(t,x_1))$ et on en déduit que $Y_-(t,x_2) \geq Y_+(t,x_1)$. Ainsi

$$Y_+(t,x_2) \geq Y_-(t,x_2) \geq Y_+(t,x_1) \geq Y_-(t,x_1).$$

Les fonctions $x \mapsto Y_-(t,x)$ et $y \mapsto Y_+(t,x)$ sont donc croissantes. En particulier, elles ont un ensemble dénombrable $\mathcal{D}(t)$ de points de discontinuité.

On pose E l'ensemble des points (t,x) tels que $Y_+(t,x) = Y_-(t,x)$ et on définit la fonction Y sur E par $Y(t,x) = Y_+(t,x)$ (et donc $Y(t,x) = Y_-(t,x)$). En tout $x_2 \in \mathcal{D}^c(t)$ les fonctions Y_+ et Y_- sont continues en x_2 et en faisant tendre x_1 vers x_2 on obtient que $Y_+(t,x_2) \geq Y_-(t,x_2) \geq \lim_{x_1\uparrow x_2} Y_+(t,x_1) = Y_+(t,x_2)$, et donc $Y_+(t,x_2) = Y_-(t,x_2)$. Donc pour tout t, on a $(t,x) \in E$ pour presque tout x. En utilisant des arguments de théorie de la mesure standards, E est un ensemble de mesure pleine de $(0,\infty)\times\mathbb{R}$, et Y ainsi définie presque partout est mesurable sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

Soit $u_{0,n}\in L^\infty$ convergeant vers u_0 dans L^1 sur tout compact. Puisque l'intersection dénombrable d'ensembles de mesure pleine est un ensemble de mesure pleine, on a que pour presque tout $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$, $\Psi_{t,x}[u_0]$ et $\Psi_{t,x}[u_{0,n}]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ atteignent leur minimum en un point unique, $Y(t,x)$ et $Y_n(t,x)$ respectivement.

Fixons un tel point $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$. Puisque la suite $u_{0,n}$ est bornée dans L^∞, on a qu'il existe $C>0$ telle que $\Psi_{t,x}[u_0](y)\geq -C|y|+\frac{(x-y)^2}{2t}$ pour tout n. Donc il existe $R>0$ tel que

$$\Psi_{t,x}[u_{0,n}](y)\geq \Psi_{t,x}[u_0](Y(t,x))+1 \tag{8.15}$$

pour tout $|y|\geq R$. Puisque $u_{0,n}\to u_0$ dans $L^1([-R,R])$, alors par la formule (8.11) on a que $\Psi_{t,x}[u_{0,n}]$ converge uniformément sur $[-R,R]$ vers $\Psi_{t,x}[u_0]$. En particulier $\Psi_{t,x}[u_{0,n}](Y(t,x))\to\Psi_{t,x}[u_0](Y(t,x))$. Donc par (8.15) pour n assez grand on a $\Psi_{t,x}[u_{0,n}](y)>\Psi_{t,x}[u_{0,n}](Y(t,x))$ pour tout $|y|\geq R$. Donc $\Psi_{t,x}[u_{0,n}]$ atteint son minimum sur $[-R,R]$.

Puisque $\Psi_{t,x}[u_0]$ est continue et atteint son minimum en un unique point $Y(t,x)$, pour tout $\epsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que $\Psi_{t,x}[u_0](y)\geq\Psi_{t,x}[u_0](Y(t,x))+\epsilon$ pour tout $|y-Y(t,x)|\geq\delta$. Puisque $\Psi_{t,x}[u_{0,n}]$ converge uniformément sur $[-R,R]$ vers $\Psi_{t,x}[u_0]$, alors $\Psi_{t,x}[u_{0,n}](y)\geq\Psi_{t,x}[u_{0,n}](Y(t,x))+\frac{\epsilon}{2}$ pour tout $|y-Y(t,x)|\geq\delta$ pour n assez grand. Donc $\Psi_{t,x}[u_{0,n}]$ atteint son minimum en un point à distance δ de $Y(t,x)$. Cela implique $Y_n(t,x)\to Y(t,x)$ comme désiré.

$\square$

2.3. Existence de solutions entropiques.

PROPOSITION 8.1. *Soit $u_0\in C(\mathbb{R})$ bornée. Alors il existe $u\in L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$ une solution entropique de l'équation de Burgers* (3.1)*. De plus, pour tout $t\geq 0$, les points de discontinuité de $u(t,\cdot)$ sont au plus dénombrable.*

Cette solution satisfait de plus la formule de Lax Oleinik :

$$u(t,x)=\frac{x-Y(t,x)}{t}. \tag{8.16}$$

Celle-ci est de plus obtenue comme limite de viscosité évanescente. Pour tout $\epsilon>0$, soit u_ϵ la solution de l'équation de Burgers visqueuse (8.8) *donnée par la proposition 8.1. Alors $u_\epsilon(t,x)$ converge vers $u(t,x)$ lorsque $\epsilon\to 0$ pour presque tout $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}$.*

PROOF. **Étape 1**. *Convergence de u_ϵ.* Dans cette première étape, nous montrons que u_ϵ converge presque partout vers la fonction

$$u(t,x)=u_0(Y(t,x)). \tag{8.17}$$

Il est à noter que cette formule définit bien une fonction $u_0(Y(t,x))\in L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$. Soit l'ensemble mesurable

$$E=\{(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R},\quad u_\epsilon(t,x)\text{ converge vers }u_0(Y(t,x))\text{ lorsque }\epsilon\to 0\}.$$

Nous allons montrer que pour tout $t>0$ fixé, on a que $u_\epsilon(t,x)$ converge vers $u_0(Y(t,x)$ lorsque $\epsilon\to 0$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}$. Cela impliquera alors que E est de mesure pleine, et ainsi que $u_\epsilon(t,x)$ converge vers $u_0(Y(t,x))$ presque partout sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ comme désiré.

Soit donc $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que par la proposition 8.10

$$u_\epsilon(t,x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi_{t,x}(y)} dy} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) e^{-\frac{1}{\epsilon}\Psi_{t,x}(y)} dy.$$

La fonction $\Psi_{t,x}$ est continue, satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $\Psi(y) \sim y^2/(2t)$ lorsque $|y| \to \infty$, et donc $e^{-\Psi_{t,x}} \in L^1(\mathbb{R})$. De plus, par le lemme 8.3, presque partout sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}$, la fonction $\Psi_{t,x}$ atteint un unique minimum en $Y(t,x)$ sur $\mathbb{R}$. Le lemme 8.2 implique alors que $u_\epsilon(t,x) \to u_0(Y(t,x))$ lorsque $\epsilon \to 0$. Cela finit l'étape 1.

Étape 2. *Formule de Lax-Oleinik.* La fonction $\Psi_{t,x}$ étant C^1 et atteignant son minimum en $Y(t,x)$ on en déduit par (8.11)

$$0 = \Psi'_{t,x}(Y(t,x)) = u_0(Y(t,x)) - \frac{x - Y(t,x)}{t}.$$

Puisque $u_0(Y(t,x)) = u(t,x)$ cela donne

$$u(t,x) = \frac{x - Y(t,x)}{t}. \tag{8.18}$$

On a ainsi pour $z > 0$

$$u(t,x+z) - u(t,x) = \frac{x + z - Y(t,x+z)}{t} - \frac{x - Y(t,x)}{t} = \frac{z + Y(t,x) - Y(t,x+z)}{t}.$$

Puisque Y est une fonction croissante on en déduit que $u(t,x+z) - u(t,x) \leq \frac{z}{t}$.

Étape 3. *Propriétés de la fonction limite.* Soit $\varphi \in C_c^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Pour tout $\epsilon > 0$, u_ϵ satisfait $u_\epsilon \in L^\infty(0,\infty) \times \mathbb{R})$ et donc

$$\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u_\epsilon \partial_t \varphi + \frac{1}{2} u_\epsilon^2 \partial_x \varphi - \frac{\epsilon}{2} u_\epsilon \partial_{xx} \varphi \right) dtdx = \lim_{T \downarrow 0} \iint_{[T,\infty)\times\mathbb{R}} \cdots$$

Puisque $u_\epsilon \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ et que φ est à support compact, en intégrant par parties

$$\begin{aligned}
&\iint_{[T,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u_\epsilon \partial_t \varphi + \frac{1}{2} u_\epsilon^2 \partial_x \varphi - \frac{\epsilon}{2} u_\epsilon \partial_{xx} \varphi \right) dtdx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} u_\epsilon(T,x) \varphi(T,x) dx - \iint_{[T,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u_\epsilon + u_\epsilon \partial_x u_\epsilon - \frac{\epsilon}{2} \partial_{xx} u_\epsilon \right) \varphi dtdx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} u_\epsilon(T,x) \varphi(T,x) dx
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que u_ϵ est une solution de (8.8) pour la dernière égalité. Puisque $u(t,x) \to u_0(x)$ lorsque $t \to 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et que $u \in L^\infty$, par convergence dominée

$$\lim_{T \to 0} \int_{\mathbb{R}} u_\epsilon(T,x) \varphi(T,x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0,x) dx.$$

En combinant les trois identités ci-dessus

$$\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u_\epsilon \partial_t \varphi + \frac{1}{2} u_\epsilon^2 \partial_x \varphi - \frac{\epsilon}{2} u_\epsilon \partial_{xx} \varphi \right) dtdx = - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0,x) dx.$$

Enfin, on remarque que $\|u_\epsilon\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ est borné indépendemment de ϵ par (8.10), et on rappelle que $u_\epsilon(t,x) \to u(t,x)$ presque partout par l'étape 1. Donc,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u_\epsilon \partial_t \varphi + \frac{1}{2} u_\epsilon^2 \partial_x \varphi - \frac{\epsilon}{2} u_\epsilon \partial_{xx} \varphi \right) dtdx = \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u \partial_t \varphi + \frac{1}{2} u^2 \partial_x \varphi \right) dtdx.$$

Ainsi, $\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u\partial_t\varphi + \frac{1}{2}u^2\partial_x\varphi\right) dtdx = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)dx$. Donc u est bien une solution au sens des distributions de l'équation de Burgers (3.1). Par l'étape 2 elle vérifie la condition d'entropie. Donc u est une solution entropique.

□

Le théorème suivant est dû à Kruzkov. La preuve que nous en donnons en utilisant une approximation visqueuse est cependant différente de la preuve qu'il a proposée.

THEOREME 8.1 (Existence d'une solution entropique de l'équation de Burgers). *Soit $u_0 \in L^\infty$ bornée. Alors il existe $u \in L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$ une solution entropique de l'équation de Burgers* (3.1).

De plus, pour tout $t \geq 0$ les points de discontinuité de $u(t,\cdot)$ sont au plus dénombrable, et celle-ci est donnée par la formule de Lax-Oleinik

$$u(t,x) = \frac{1}{t}(x - Y(t,x)). \tag{8.19}$$

Remark 8.2 (Formule de Lax-Oleinik)**.** Lorsque la donnée initiale est continue la solution est donnée par deux formules :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u_0(Y(t,x)) \\ &= \frac{1}{t}(x - Y(t,x)). \end{aligned}$$

Lorsque la donnée initiale est seulement L^∞ la première ligne ne fait plus forcément sens mais la seconde si.

PROOF. Soit $u_{0,n}$ une suite de fonctions continues, bornée dans L^∞, et qui converge vers u_0 dans L^1 sur tout compact. Une telle suite existe toujours par densité des fonctions continues dans L^p pour tout $1 \leq p < \infty$ (voir appendice de ce cours). Soient Y et Y_n les fonctions données par le lemme 8.3, et soit u_n la solution correspondante donnée par la proposition 8.1.

Alors par (8.18) on a $u_n(t,x) = \frac{x - Y_n(t,x)}{t}$. Par le lemme 8.3, on a que Y_n converge presque sûrement sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ vers Y. Donc u_n converge presque sûrement vers la fonction

$$u(t,x) = \frac{x - Y(t,x)}{t}.$$

De plus, pour tout n par (8.17) on a $\|u_n\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})} \leq \|u_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Donc puisque la suite u_n est bornée dans L^∞ on a a la limite

$$u \in L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Alors puisque u_n est une solution au sens des distributions de (3.1) on a

$$\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u_n\partial_t\varphi + \frac{1}{2}u_n^2\partial_x\varphi\right) dtdx = -\int_{\mathbb{R}} u_{0,n}(x)\varphi(0,x)dx.$$

En passant à la limite dans le membre de gauche par convergence dominée, et dans le membre de droite puisque $u_{0,n} \to u_0$ dans L^1 sur le support de $\varphi(0,\cdot)$ on obtient

$$\iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u\partial_t\varphi + \frac{1}{2}u^2\partial_x\varphi\right) dtdx = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)dx.$$

Donc u est bien une solution au sens des distributions. On peut également passer à la limite presque sûrement dans l'inégalité (8.7) et obtenir que u vérifie la condition d'entropie.

□

2.4. Unicité des solutions entropiques.

THEOREME 8.3 (Unicité des solutions entropiques). *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$*, et soient* u *et* v *deux solutions entropiques de l'équation de Burgers* (3.1) *de même donnée initiale* u_0*. Alors* $u = v$ *presque partout sur* $[0,\infty) \times \mathbb{R}$.

PROOF. **Étape 1**. *Équation au sens des distributions pour la différence.* On pose $w = u - v$, et $b = \frac{1}{2}(u+v)$. On a alors :

$$u^2 - v^2 = 2bw.$$

Pour tout fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$ on a par (8.2)

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} (u-v)\varphi_t + (\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2})\varphi_t dtdx \\ &= \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} w(\varphi_t + b\varphi_x) dtdx. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Étape 2. *Régularisation de l'équation pour la différence.* Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$, et $\chi^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\chi(\frac{x}{\epsilon})$. On pose alors $u^\epsilon(t,\cdot) = \chi(\cdot) * u(t,\cdot)$ et $v^\epsilon(t,\cdot) = \chi(\cdot) * v(t,\cdot)$. Alors u^ϵ, v^ϵ sont C^∞ par rapport à la variable x, et

$$u^\epsilon \to u \text{ et } v^\epsilon \to v \text{ presque partout sur } [0,\infty)\times\mathbb{R} \text{ lorsque } \epsilon \downarrow 0.$$

Un rappel de ces propriétés est dans le lemme **??** de l'annexe. De plus, par la condition d'entropie (8.7) on a

$$\begin{aligned} u_x^\epsilon(t,x) &= \lim_{z\downarrow 0} \frac{1}{z} u^\epsilon(x+z) - u^\epsilon(x) \\ &= \lim_{z\downarrow 0} \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}} (u^\epsilon(x+z+y) - u^\epsilon(x+y))\chi^\epsilon(y)dy \\ &\le \lim_{z\downarrow 0} \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}} zC(1+\frac{1}{t})\chi^\epsilon(y)dy \\ &= C(1+\frac{1}{t}). \end{aligned}$$

On pose $b_x^\epsilon = \frac{1}{2}(u^\epsilon + v^\epsilon)$, et donc l'inégalité ci-dessus donne

$$b^\epsilon \le C(1+\frac{1}{t}). \tag{8.21}$$

On décompose (8.20)

$$0 = \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} w(\varphi_t + b^\epsilon\varphi_x)dtdx + \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} w(b-b^\epsilon)\varphi_x dtdx. \tag{8.22}$$

Étape 3. *Résolution du problème dual régularisé.* Fixons $T > 0$ et une fonction $\Psi \in C_c^\infty((0,T)\times\mathbb{R})$. On pose φ^ϵ la solution de

$$\begin{cases} \varphi_t^\epsilon + b^\epsilon\varphi_x^\epsilon = \Psi & \text{sur } (0,T)\times\mathbb{R}, \\ \varphi^\epsilon(T,x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8.23}$$

Il existe en effet une unique solution qui est C^∞ par rapport à x. L'équation ci-dessus étant une équation de transport linéaire inhomogène, on peut appliquer la méthode des équations caractéristiques vue dans la section 2 (voir aussi les exemples des sous-sections 1.2 et 1.2). Pour $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}$ les lignes caractéristiques sont les solutions $y(t)$ de

$$\begin{cases} y'(s) = b^\epsilon(s, y(s)), \\ y(t) = x. \end{cases}$$

On note $y(t,x)$ pour marquer le fait que y est en position x au temps t. On peut vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique bien, et que y est C^∞ par rapport à la variable x. La solution de (8.23) est alors

$$\varphi^\epsilon(t,x) = -\int_t^T \Psi(s, y(s,x))ds. \tag{8.24}$$

L'identité (8.22) devient

$$0 = \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} w\Psi dtdx + \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} w(b-b^\epsilon)\varphi_x^\epsilon dtdx. \tag{8.25}$$

Étape 4. Borne pour φ_x^ϵ pour $s \leq t \leq T]$. On affirme que pour tout $s > 0$ il existe $C_s > 0$ indépendante de ϵ telle que

$$|\varphi_x^\epsilon| \leq C_s \qquad \text{sur } [s,T]\times\mathbb{R}. \tag{8.26}$$

Pour le démontrer, on va appliquer un raisonnement par *principe du maximum*, similaire à celui de l'exercice 1.1. On commence par différencier (8.23) par rapport à x pour obtenir l'équation satisfaite par φ_x^ϵ:

$$\begin{cases} \partial_t\varphi_x^\epsilon + b^\epsilon\partial_x\varphi_x^\epsilon + b_x^\epsilon\varphi_x^\epsilon = \Psi_x & \text{sur } (0,T)\times\mathbb{R}, \\ \varphi_x^\epsilon(T,x) = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8.27}$$

(on a écrit $\partial_x\varphi_x^\epsilon$ à la place de φ_{xx}^ϵ pour bien insister sur le fait que, de notre point de vue, φ_x^ϵ est l'inconnue de cette équation). On pose $a(t,x) = e^{\lambda t}\varphi_x^\epsilon(t,x)$ et l'équation (8.27) devient

$$\begin{cases} \partial_t a + b^\epsilon\partial_x a + (b_x^\epsilon - \lambda)a = e^{\lambda t}\Psi_x & \text{sur } (0,T)\times\mathbb{R}, \\ a = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8.28}$$

Soit maintenant (t_0, x_0) un point où a atteint son maximum sur $[s,T]$. Ce point existe en effet, puisqu'en remarquant que b^ϵ est bornée et que Ψ est à support compact, alors $\varphi^\epsilon = 0$ pour tout $|x|$ assez grand et donc $a = 0$. Trois cas sont à considérer :

- *Si* $t_0 = s$. Alors puisque a atteint son maximum sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ en (s,x_0) on a $a_x(s,x_0) = 0$ et $a_t(s,x_0) \leq 0$. Donc (8.28) donne
$$(b_x^\epsilon(s,x_0) - \lambda)a(s,x_0) \geq e^{\lambda s}\Psi_x(s,x_0).$$
Puisque $b^\epsilon \leq C(1+\frac{1}{s})$ par (8.21) alors $(b_x^\epsilon - \lambda) \leq -1$ pour λ assez grand. L'inégalité ci-dessus implique alors
$$\max_{[s,T]\times\mathbb{R}} a = a(s,x_0) \leq \frac{e^{\lambda s}\Psi_x(s,x_0)}{b_x^\epsilon(s,x_0)-\lambda} \leq e^{\lambda T}\|\Psi_x\|_{L^\infty}.$$
- *Si* $t_0 \in (s,T)$. Alors on a $a_x(s,x_0) = 0$ et $a_t(s,x_0) = 0$. Le même calcul donne alors
$$\max_{[s,T]\times\mathbb{R}} a = \frac{e^{\lambda t_0}\Psi_x(t_0,x_0)}{b_x^\epsilon(t_0,x_0)-\lambda} \leq e^T\|\Psi_x\|_{L^\infty}.$$
- *Si* $t_0 = T$. Alors $a(t_0,x_0) = 0$ par (8.28), et donc $\max_{[s,T]\times\mathbb{R}} a \leq 0$.

En combinant l'analyse de ces trois cas, on s'aperçoit que $\max_{[s,T]\times\mathbb{R}} a \leq e^{\lambda T}\|\Psi_x\|_{L^\infty}$. Un calcul très similaire, en considérant un minimiseur de a, montre que $\min_{[s,T]\times\mathbb{R}} a \geq -e^{\lambda T}\|\Psi_x\|_{L^\infty}$. Puisque $a = e^{\lambda t}\varphi_x^\epsilon$ cela implique (8.26).

Étape 5. Borne pour φ_x^ϵ pour $0 < t \leq \tau$. On affirme qu'il existe une constante $L > 0$ tel que pour tout t assez petit:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_x^\epsilon(t,x)| dx \leq L. \tag{8.29}$$

En effet, soit $\tau > 0$ tel que $\Psi = 0$ pour $t \leq \tau$. Alors φ^ϵ est constante le long des caractéristiques par (8.24) :

$$\varphi(t,x) = \varphi(\tau, y(\tau,x)) \qquad \text{pour tous } (t,x) \in [0,\tau] \times \mathbb{R}.$$

Soient des points $x_0 < ... < x_N$ et $y_i = y(\tau, x_i)$. Alors

$$\sum_{i=0}^{N-1} |\varphi(t,x_{i+1}) - \varphi(t,x_i)| = \sum_{i=0}^{N-1} |\varphi(\tau,y_{i+1}) - \varphi(t,y_i)|$$

Puisque les lignes caractéristiques ne s'intersectent pas par Cauchy-Lipschitz, on a que $y_0 < ... < y_N$. En utilisant que

$$\int_{\mathbb{R}} |f_x| dx = \sup_{N \in \mathbb{N}^*,\ x_0 < ... < x_N} \sum_{i=0}^{N} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

on obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_x^\epsilon(t,x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi_x^\epsilon(\tau,x)| dx \leq C$$

où l'on a utilisé (8.26) et le fait que φ^ϵ est à support compact pour la derniere inégalité.

Étape 6. *Fin de la preuve par dualité.* Pour $s > 0$ on décompose (8.25) en

$$0 = \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} w\Psi dt dx + \underbrace{\iint_{[0,s]\times\mathbb{R}} w(b - b^\epsilon)\varphi_x^\epsilon dt dx}_{I} + \underbrace{\iint_{[s,T]\times\mathbb{R}} w(b - b^\epsilon)\varphi_x^\epsilon dt dx}_{II}.$$

Puisque $w \in L^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$, $\|\varphi_x^\epsilon\|_{L^\infty(([s,T]\times\mathbb{R})} \leq C_s$ et $b^\epsilon \to b$ presque partout par les étapes 2 et 4 on a par convergence dominée que

$$I \to 0$$

lorsque $\epsilon \to 0$. Puisque $\|b^\epsilon\|_{L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})} \leq \|b\|_{L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})}$ on a en utilisant (8.29) que

$$|II| \leq \iint_{[s,T]\times 2\|w\|_{L^\infty}\|b\|_{L^\infty}\mathbb{R}} |\varphi_x^\epsilon| dt dx \leq 2L\|w\|_{L^\infty}\|b\|_{L^\infty}\tau \to 0$$

lorsque $\tau \to 0$. En combinant, on obtient que

$$0 = \iint_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} w\Psi dt dx.$$

Puisque cela est vrai pour toute fonction test $\Psi \in C_c^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ on en conclut que $w = 0$ comme désiré.

$\square$

3. Resolution auto-similaire en temps long pour les solutions entropiques

Considérons la fonction suivante pour $p, q \geq 0$:

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{x}{t} & \text{pour } -p\sqrt{t} \leq x \leq q\sqrt{t}, \\ 0 & \text{pour } x \in (-\infty, -p\sqrt{t}) \cup (q\sqrt{t}, \infty). \end{cases}$$

Alors u est une fonction auto-similaire progressive, de la forme

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Psi_{p,q}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

avec

$$\Psi_{p,q}(y) = \begin{cases} y & \text{pour } -p \leq y \leq q, \\ 0 & \text{pour } y \in (-\infty, -p) \cup (q, \infty). \end{cases} \tag{8.30}$$

Lemme 8.1 (Profil auto-similaire expanseur). *Pour tous $p, q \geq 0$, la fonction*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \Psi_{p,q}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

est une solution entropique de l'équation de Burgers (3.1) sur $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}$ pour tout $t_0 > 0$ dans le sens où pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty([t_0, \infty) \times \mathbb{R})$ on a

$$\iint_{[t_0,\infty)\times\mathbb{R}} \left(u\partial_t\varphi + \frac{1}{2}u^2\partial_x\varphi\right) dtdx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{t_0}} \Psi_{p,q}(\frac{x}{\sqrt{t_0}})\varphi(t_0, x)dx.$$

Cela est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 8.2. *Soit $u \in L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$, et $\gamma_1, ..., \gamma_N$ des courbes C^1 ne s'intersectant pas. On suppose que*

(i) Solution classique en dehors des courbes de discontinuité. *$u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R} \setminus \cup_1^N \{(t, \gamma_i(t))\})$ et est une solution classique de l'équation de Burgers (3.1) sur cet ensemble.*

(ii) Condition entropique aux courbes de discontinuité. *Pour tout $t \geq 0$ on a que les limites $\lim_{h\uparrow} u(t, \gamma_i(t)+h)$ et $\lim_{h\downarrow} u(t, \gamma_i(t)+h)$ sont bien définies, avec*

$$\lim_{h\uparrow} u(t, \gamma_i(t) + h) \geq \lim_{h\downarrow} u(t, \gamma_i(t) + h).$$

(iii) Condition de Rankine-Hugoniot pour la propagation des singularités. *Pour tout $1 \leq i \leq N$:*

$$\gamma_i'(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{h\uparrow} u(t, \gamma_i(t) + h) + \lim_{h\downarrow} u(t, \gamma_i(t) + h)\right).$$

Alors u est une solution entropique de l'équation de Burgers

Proof. La preuve est laissée en exercice. Indication : il suffit de savoir traiter le cas d'une seule courbe de discontinuité $N = 1$ où l'on pourra utiliser des intégrations par parties.

□

Preuve du lemme 8.1. La fonction $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\Psi(\frac{x}{\sqrt{t}})$ a deux courbes de discontinuité en $\gamma_+(t) = q\sqrt{t}$ et en $\gamma_-(t) = -p\sqrt{t}$. Pour $x < \gamma_-(t)$ et $x > \gamma_+(t)$, u est bien une solution classique de l'équation de Burgers. Pour $\gamma_-(t) < x < \gamma_+(t)$ on a que

$$\partial_t u + u\partial_x u = \frac{-x}{t^2} + \frac{x}{t}\frac{1}{t} = 0$$

et donc u est aussi une solution classique. Enfin, aux courbes de discontinuités, on a

$$\gamma'_+ = \frac{q}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}(\frac{q}{\sqrt{t}} + 0) = \frac{1}{2}(\lim_{h\uparrow 0} u(t, \gamma_+(t) + h) + \lim_{h\downarrow 0} u(t, \gamma_+(t) + h))$$

et de même en γ_-. Donc la condition de Rankine Hugoniot est vérifiée. La condition d'entropie est également vérifiée. On obtient alors le résultat désiré en combinant le lemme 8.2 et l'invariance par translation temporelle de l'équation (lemme 3.1.)

□

THEOREME 8.1 (Résolution auto-similaire des solutions faibles). *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *à support compact. On pose*[1]

$$\begin{aligned} p^2 &= -2 \min_{y\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} u_0(x)dx \geq 0, \\ q^2 &= 2 \max_{y\in\mathbb{R}} \int_{y}^{\infty} u_0(x)dx \geq 0. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Alors

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Psi_{p,q}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + v(t, x) \tag{8.32}$$

avec, pour une constante $C > 0$,

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \to 0 \qquad \textit{lorsque } t \to \infty. \tag{8.33}$$

Remark 8.2. On vérifie par un changement de variable et un calcul explicite que $\|\frac{1}{\sqrt{t}}\Psi_{p,q}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{p^2+q^2}{2}$ est indépendent du temps. La décomposition (8.32) et la borne (8.33) assurent donc qu'à l'ordre principal, dans L^1, u converge vers $\Psi_{p,q}$.

Ce théorème rappelle la résolution auto-similaire des singularités obtenues dans le théorème 3.1. Les deux régimes $t \uparrow T$ lorsque T est un temps singulier, et $t \to \infty$ pour une solution globale, sont ce que l'on appelle des régimes asymptotiques. On a donc une propriété commune au comportement près des singularités et en temps long : les solutions deviennent auto-similaire à l'ordre principal !

PROOF. **Étape 1**. *Borne uniforme sur u.* On affirme qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|u(t, x)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \qquad \text{presque partout.} \tag{8.34}$$

En effet, on rappelle que par la formule de Lax-Oleinik (remarque 8.2)

$$u(t, x) = \frac{x - Y(t, x)}{t} \tag{8.35}$$

où $Y(t, x)$ est le minimiseur de la fonction

$$\Psi_{t,x}(y) = U_0(y) + \frac{(x - y)^2}{2t}.$$

On calcule qu'en $y = x$ on a

$$\Psi_{t,x}(y) = U_0(x) \leq \int |u_0|,$$

[1]Comme u_0 est à support compact, $\int_{-\infty}^{y} u_0 = 0$ pour y assez négatif, et $\int_{y}^{\infty} u_0 = 0$ pour y assez grand. Donc on a effectivement $\min_{y\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} u_0(x)dx \leq 0$ et $\max_{y\in\mathbb{R}} \int_{y}^{\infty} u_0(x)dx \geq 0$.

et que pour $|y-x| > 2\sqrt{t\int|u_0|}$ on a

$$\Psi_{t,x}(y) > U_0(y) + \frac{(2\sqrt{t\int|u_0|})^2}{2t} > -\int|u_0| + 2\int|u_0| > \int|u_0|.$$

Donc $Y(t,x) \in [x-2\sqrt{t\int|u_0|}, x+2\sqrt{t\int|u_0|}]$. Alors par (8.35) on a $|u(t,x)| \leq t^{-1}|x-Y(t,x)| \leq \frac{2\sqrt{\int|u_0|}}{\sqrt{t}}$ ce qui démontre (8.34).

Étape 2. *Localisation du support.* On a que $u_0(x) = 0$ pour tout $|x| \geq R$ car u_0 est à support compact. On affirme qu'alors

$$u(t,x) = 0 \qquad \text{pour } x \in (-\infty, -R-p\sqrt{t}) \cup (R+q\sqrt{t}, \infty).$$

En effet, fixons $x \geq R+q\sqrt{t}$. Si $y \geq R$ on a de par le support compact de u_0

$$U_0(y) = \int_0^y u_0(z)dz = \int_0^\infty u_0(z)dz =: U_0^+.$$

Ainsi,

$$\Psi_{t,x}(y) = U_0^+ + \frac{(x-y)^2}{2t} \geq U_0^+$$

avec égalité pour $x = y$. Si $y < R$ alors

$$\Psi_{t,x}(y) = U_0(y) + \frac{(x-y)^2}{2t} > U_0(y) + \frac{(q\sqrt{t})^2}{2t} = U_0(y) + \frac{q^2}{2}.$$

Soit $y_0 \in [-R,R]$ un point en lequel $U_0(y_0) = \min_{z\in\mathbb{R}} U_0(z)$. Alors en écrivant $U_0(z) = \int_0^\infty u_0 - \int_z^\infty u_0$ et en utilisant (8.31) on s'aperçoit que

$$\min_{z\in\mathbb{R}} U_0(z) = U_0^+ - \frac{q^2}{2}.$$

Donc $U_0(y) \geq U_0^+ - \frac{q^2}{2}$ et alors

$$\Psi_{t,x}(y) > U_0^+ - \frac{q^2}{2} + \frac{q^2}{2} > U_0^+.$$

Donc le minimum de $\Psi_{t,x}$ est atteint en x, c'est-à-dire $Y(t,x) = x$. En utilisant la formule de Lax-Oleinik (8.35) on trouve donc $u = 0$. Le cas $x < -R-p\sqrt{t}$ est similaire et nous l'omettons.

Étape 3. *Borne sur Y dans la zone intérieure.* Soit $\epsilon = \frac{A}{\sqrt{t}}$. Alors on affirme qu'il existe A assez grand tel que pour tout t assez grand,

$$\text{si } x \in \left[-R-p\sqrt{t}(1-\epsilon), R+q\sqrt{t}(1-\epsilon)\right] \qquad \text{alors } |Y(t,x)| \leq R. \tag{8.36}$$

Nous allons d'abord démontrer ce résultat si $p,q \neq 0$. Puisque $Y(t,\cdot)$ est une fonction croissante d'après le lemme 8.3, alors il suffit de montrer que $Y(t,x_-) \geq -R$ et $Y(t,x_+) \leq R$ pour $x_- = -R-p\sqrt{t}(1-\epsilon)$ et $x_+ = R+q\sqrt{t}(1-\epsilon)$. Nous montrons ceci seulement pour x_+ puisque la preuve pour x_- est similaire.

On a vu à l'étape 2 que

$$\Psi_{t,x_+}(y) \geq U_0^+ \qquad \text{pour } y \geq R.$$

On rappelle que $y_0 \in [-R,R]$ est un point tel que $U_0(y_0) = U_0^+ - \frac{q^2}{2}$. Alors

$$\Psi_{t,x_+}(y_0) = U_0^+ - \frac{q^2}{2} + \frac{(x_+-y_0)^2}{2t}.$$

Si $q > 0$, on calcule que

$$\begin{aligned}
-\frac{q^2}{2} + \frac{(x_+ - y_0)^2}{2t} &= -\frac{q^2}{2} + \frac{(R + q\sqrt{t}(1-\epsilon) - y_0)^2}{2t} \\
&= -q^2\epsilon + \frac{q^2\epsilon^2}{2} + \frac{(R - y_0)(R + q\sqrt{t}(1-\epsilon) - y_0)}{2t} \\
&\leq -\frac{q^2 A}{\sqrt{t}} + \frac{q^2 A^2}{2t} + \frac{2R(2R + q\sqrt{t})}{2t} \\
&< 0
\end{aligned}$$

si A a été choisit tel que $q^2 A > Rq$, puis t a ensuite été choisi assez grand. Donc

$$\Psi_{t,x_+}(y_0) < U_0^+.$$

Donc le minimiseur de Ψ_{t,x_+} est $\leq R$, ce qui signifie $Y(t, x_+) \leq R$ comme désiré.

Cela démontre (8.36) si $p, q \neq 0$. Si l'un de ces deux nombres est nul, alors par densité il existe une suite $u_{0,n}$ à support compact, bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$, avec $u_{0,n} \to u_0$ dans L^1, et $p_n, q_n \neq 0$. On applique alors le résultat précédent à $u_{0,n}$, et (8.36) s'obtient pour u par passage à la limite $n \to \infty$ grâce au Lemme 8.3.

Étape 4. *Fin de la preuve.* On pose $v = u - \frac{1}{\sqrt{t}}\Psi_{p,q}(\frac{x}{\sqrt{t}})$. On a par l'étape 2 et la formule (8.30) que

$$v(t,x) = 0 \qquad \text{pour } x \leq -R - p\sqrt{t} \text{ et } x \geq R + q\sqrt{t}.$$

On a par l'étape 1 et la formule (8.30) que

$$|v(t,x)| \leq \frac{C'}{\sqrt{t}} \qquad \text{pour } x \in [-R - p\sqrt{t}, x_-] \cup [x_+, R + q\sqrt{t}].$$

On a par l'étape 3, la formule de Lax-Oleinik (8.35) et (8.30) que pour

$$|v| = \left| \frac{x - Y(t,x)}{t} - \frac{x}{t} \right| \leq \frac{R}{t} \qquad \text{pour } x \in [x_-, x_+].$$

On d'ecompose donc

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^1} &= \|v\|_{L^1((-\infty,-R-p\sqrt{t})\cup(R+q\sqrt{t},\infty)} + \|v\|_{L^1([-R-p\sqrt{t},x_-]\cup[x_+,R+q\sqrt{t}])} + \|v\|_{L^1[x_-,x_+]} \\
&\leq 0 + \|\frac{C'}{\sqrt{t}}\|_{L^1([-R-p\sqrt{t},x_-]\cup[x_+,R+q\sqrt{t}])} + \|\frac{R}{t}\|_{L^1[x_-,x_+]} \\
&= \frac{C'}{\sqrt{t}}\left(\epsilon p\sqrt{t} + \epsilon q\sqrt{t}\right) + \frac{R}{t}(x_+ - x_-) \\
&\leq \frac{C'(p+q)A}{\sqrt{t}} + \frac{R}{t}(2R + (p+q)\sqrt{t}) \ \leq \frac{C'''}{\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

ce qui clôt la preuve du théorème.

□

3.1. Exercices.

EXERCICE 8.1. *On considère l'équation de transport linéaire*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x) = 0, & t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8.37}$$

On fait l'hypothèse que $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et que les fonctions b et $\frac{d}{dx}b$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $X \in \mathbb{R}$ on note $y(t,X)$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t y(t,X) = b(y(t,X)), \\ y(0,X) = X. \end{cases} \tag{8.38}$$

On admet les résultats de l'exercice 2.3 : pour tout $t \geq 0$ *la fonction* $X \mapsto y(t, X)$ *est un* C^1 *difféomorphisme sur* $\mathbb{R}$ *et on note* $y^{-1}(t, \cdot)$ *son application inverse, et pour* $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *il existe une unique fonction* $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$ *qui est une solution classique de* (2.20) *qui est donnée par la formule :*

$$u(t, x) = u_0(y^{-1}(t, x)). \tag{8.39}$$

On définit les solutions de (8.37) *au sens des distributions comme suit :*

Définition : *Pour* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, *on dit que* $u \in L^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$ *est une solution au sens des distributions de* (2.20) *si*

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} u(t, x) \left(\partial_t \phi(t, x) + \frac{d}{dx} b(x) \phi(t, x) + b(x) \partial_x \phi(t, x) \right) dt dx = - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx$$

pour toutes les fonctions test $\phi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$. *Cet exercice démontrera le résultat suivant :*

Résultat *: pour toute fonction* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *il existe une unique fonction* $u \in L^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$ *qui est une solution au sens des distributions de* (2.20) *et elle s'écrit* $u(t, x) = u(y^{-1}(t, x))$.

(1) *Soit* $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ *et* $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$ *bornées. Montrer que* u *est une solution classique de* (8.37) *si et seulement si c'est une solution au sens des distributions de* (8.37).
(2) *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Soit* $u_{0,n}$ *une suite de fonctions telle que* $u_{0,n} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, *que* $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R})$, *et que* $u_{0,n}(x) \to u_0(x)$ *lorsque* $n \to \infty$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$. *Soit* u_n *les solutions classiques correspondantes de* (8.37). *Montrer que* u_n *est bornée dans* $L^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$ *et que*

$$u_n(t, x) \to u_0(y^{-1}(t, x))$$

pour presque tout $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$.
(3) *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Montrer que la fonction* $u(t, x) = u_0(y^{-1}(t, x))$ *est une solution au sens des distributions de* (2.20).
(4) *Soit* $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$. *Soit* $T > 0$ *tel que* $\psi(t, x) = 0$ *pour tout* $t \geq T$ *et* $x \in \mathbb{R}$. *Montrer qu'il existe une solution classique de*

$$\begin{cases} \partial_t \phi(t, x) + b(x) \partial_x \phi(t, x) + \frac{d}{dx} b(x) \phi(t, x) = \psi(t, x), & t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}, \\ \phi(T, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

qui s'écrit

$$\phi(t, x) = \int_T^t \exp\left(\int_t^{t'} \frac{d}{dx} b(y(t'', y^{-1}(t, x))) dt'' \right) \psi(t', y(t', y^{-1}(t, x))) dt'.$$

(5) *Soit* u *une solution au sens des distributions de* (8.37) *pour* $u_0 = 0$. *Montrer que*

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbb{R}} u(t, x) \psi(t, x) dx = 0$$

pour toutes fonctions $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$. *En déduire que* $u = 0$ *presque partout.*
(6) *Démontrer le résultat annoncé.*

Exercice 8.2. *Démontrer le lemme 8.2.*

EXERCICE 8.3. *Pour* $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ *bornée, on considère la solution classique* $u \in C^1([0,T) \times \mathbb{R})$ *de l'équation de Burgers* (3.1) *et la solution entropique* $v \in L^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ *du théorème 8.1 donnée par la formule* (8.19)*. Montrer que*

$$u(t,x) = v(t,x) \qquad \text{pour } (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}.$$

EXERCICE 8.4. *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

- *Montrer que* Y *défini dans le lemme 8.3 satisfait*

$$|Y(t,x) - x| \leq t\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

- *Soient* $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *avec* $u_0(x) = v_0(x)$ *pour presque tout* $x \in (a,b)$*. Posons* $c = \max(\|u_0\|_{L^\infty}, \|v_0\|_{L^\infty})$*. Alors les solutions entropiques correspondantes* u *et* v *de l'équation de Burgers* (3.1) *du théorème 8.1 données par la formule* (8.19) *satisfont*

$$u(t,x) = v(t,x) \qquad \text{pour presque tout } t < \frac{b-a}{2c} \text{ et } x \in (a+ct, b-ct).$$

  On appelle cette propriété la vitesse de propagation finie.

EXERCICE 8.5. *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *et* $u \in L^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$ *une solution au sens des distributions de l'équation de Burgers* (3.1)*. On suppose de plus que* u *est continue sur* $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ *et qu'il existe une fonction continue positive* R *telle que* $u(t,x) = 0$ *pour tout* $|x| \geq R(t)$*. Montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx \qquad \text{pour tout } t \in [0,\infty).$$

On dit alors que la masse est une quantité conservée. *(Indication : on pourra essayer de trouver une suite de fonctions* φ_n *bien choisie dans* (8.2)*)*

CHAPTER 9

Outils d'analyse harmonique III : Décomposition de Calderón-Zygmund et integrales singulières

Dans ce chapitre, on cherche à étudier des opérateurs définis comme la convolution avec un noyau K. Si $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors en appliquant l'inégalité de Young (4.14) l'opérateur T donné par

$$T(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(y)u(x-y)dy$$

est bien défini pour toute fonction $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p \leq \infty$, et T est un opérateur continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Malheureusement, certains opérateurs sont donnés par la convolution avec un noyau qui n'est pas L^1. C'est le cas de la transformée de Hilbert en dimension $n = 1$:

$$\mathcal{H}(u)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{1}{y} u(x-y)dy$$

et de la transformée de Riesz en dimension n :

$$\mathcal{R}_j(u)(x) = \frac{1}{\pi |\mathbb{B}_{n-1}|} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} u(x-y)dy$$

où $|\mathbb{B}_{n-1}|$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$. Ces opérateurs apparaissent fréquemment car ce sont des opérateurs d'ordre 0 (nous rencontrerons la transformée de Riesz au chapitre 11). Nous allons voir dans ce chapitre comment de tels opérateurs, avec des noyaux presque dans L^1 (puisque la fonction $|x|^{-n}$ est presque dans $L^1(\mathbb{R}^n)$) agissent sur les espaces de Lebesgue.

Soit donc K une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ satisfaisant

$$\sup_{R>0} \int_{R<|x|<2R} |K(x)|dx = A_1 < \infty. \tag{9.1}$$

Cette condition est en particulier vérifiée si $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^n |K(x)| < \infty$. Si l'on suppose de plus qu'il existe une suite $\delta_j \downarrow 0$ telle que

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\delta_j < |x| < 1} K(x)dx = L \in \mathbb{R},$$

alors pour toutes fonction $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur

$$T(u)(x) = \lim_{j \to \infty} \int_{|y|>\delta_j} K(y)u(x-y)dy$$

est bien défini. En effet, on remarque que pour $\delta_j < 1$ on peut décomposer

$$\int_{|y|>\delta_j} K(y)u(x-y)dy = u(x) \int_{\delta_j<|y|<1} K(y)dy + \int_{\delta_j<|y|<1} K(y)(u(x-y)-u(x))dy$$
$$+ \int_{|y|>1} K(y)u(x-y)dy.$$

Ainsi, en passant à la limite $j \to \infty$,

$$T(u)(x) = Lu(x) + \int_{|y|<1} K(y)(u(x-y) - u(x))dy + \int_{|y|>1} K(y)u(x-y)dy. \quad (9.2)$$

On vérifie effectivement que la première intégrale converge absolument car $|u(x-y) - u(x)| \leq C|y|$ puisque $u \in C^1$ et donc en utilisant (9.1),

$$\int_{|y|<1} |K(y)(u(x-y) - u(x))|dy = \sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\leq 0} \int_{2^{k-1}<|y|<2^k} |K(y)(u(x-y) - u(x))|dy$$

$$\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\leq 0} \int_{2^{k-1}<|y|<2^k} |K(y)||y|dy \ \leq C \sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\leq 0} 2^k \int_{2^{k-1}<|y|<2^k} |K(y)|dy$$

$$\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\leq 0} 2^k A_1 = 2CA_1.$$

La seconde intégrale converge aussi absolument en utilisant que $u \in C_c^\infty$, (9.1), et un calcul similaire.

On dira que, pour un noyau K satisfaisant la condition, un opérateur T est représenté par le noyau K en dehors de l'origine si il s'écrit sous la forme (9.2).

1. Décomposition de Calderon-Zygmund

Un cube dyadique Q de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme

$$Q = [2^k m_1, 2^k(m_1+1)) \times ... \times [2^k m_n, 2^k(m_n+1))$$

pour $m \in \mathbb{Z}^n$ et $k \in \mathbb{Z}$. Ses côtés ont la même longueur 2^k, son volume et 2^{kn}, et son centre est $\left(2^k(m_1+\frac{1}{2}), ..., 2^k(m_n+\frac{1}{2})\right)$. On remarque que si Q est un cube dyadique de longueur 2^k, alors Q contient exactement 2^n cubes dyadiques de longueur 2^{k-1}, et est contenu dans un unique cube dyadique de longueur 2^{k+1}. Également, si Q et Q' sont deux cubes dyadiques, alors soit Q et Q' sont disjoints, soit un de ces deux cubes est contenu à l'intérieur de l'autre.

Theoreme 9.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha > 0$. Alors on peut décomposer*

$$f = g + b \quad (9.3)$$

où g satisfait $g \in L^1 \cap L^\infty$ avec

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad et \quad \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^n\alpha. \quad (9.4)$$

et où $b = \sum_j b_j$, pour un nombre fini ou dénombrable de fonctions b_j qui sont supportées sur des cubes dyadiques disjoints Q_j avec

$$\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1} \quad (9.5)$$

et qui satisfont

$$\int b_j(x)dx = 0 \quad et \quad \frac{1}{|Q_j|}\int |b_j(x)|dx \leq 2^{n+1}\alpha. \quad (9.6)$$

Proof. **Étape 1**. *L'algorithme de séléction.* On commence par prendre $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{k_0 n} \geq \alpha^{-1}\|f\|_{L^1}$. On appelle les cubes dyadiques de longueur 2^{k_0} les cubes de génération 0, et ils satisfont

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx \leq \alpha. \quad (9.7)$$

On divise chaque cube de génération 0 en 2^n cubes de longueur 2^{k_0-1}, qu'on appelle cubes de génération 1. Si Q est un cube de génération 1 tel que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx > \alpha \tag{9.8}$$

alors on le sélectionne. On note S_1 l'ensemble des cubes de génération 1 sélectionnés. On itère alors l'algorithme. Chaque cube de génération 1 qui n'a pas été sélectionné est divisé en 2^n cubes de longueur 2^{k_0-2} qu'on appelle cubes de génération 2. Si un cube de génération 2 satisfait (9.8) on le sélectionne, et on note S_2 l'ensemble des cubes de génération 2 sélectionnés. On construit ainsi de suite les ensembles S_i des cubes de génération $i \in \mathbb{N}$. L'ensemble des cubes sélectionnés est dénombrable, et on l'écrit sous la forme $\cup_{i\in\mathbb{N}} S_i = \{Q_j\}_{j\in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$. On pose alors

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy\right)\mathbb{1}_{Q_j}(x), \tag{9.9}$$

$b = \sum_j b_j$ et $g = f - b$. On remarque que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \cup_{j\in J} Q_j, \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy & \text{si } x \in Q_j \text{ pour un } j \in J. \end{cases} \tag{9.10}$$

Étape 2. *Propriétés de la décomposition pour b.* Soit Q_j un cube sélectionné. Alors la première identité de (9.6) découle directement de (9.9).

Puis par définition de l'algorithme, Q_j a été obtenu en divisant un cube $\widetilde{Q}_j$ de longueur deux fois plus grande qui n'avait pas été sélectionné. En utilisant d'abord que $Q_j \subset \widetilde{Q}_j$ et $|\widetilde{Q}_j| = 2^n|Q_j|$, puis en appliquant (9.7) à $\widetilde{Q}_j$ on obtient

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|dx \le \frac{2^n}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j} |f(x)|dx \le 2^n\alpha \tag{9.11}$$

et donc

$$\left|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy\right| \le 2^n\alpha. \tag{9.12}$$

En injectant (9.11) et (9.12) dans (9.9), on en déduit

$$\frac{1}{Q_j}\int |b_j(x)|dx \le \frac{1}{Q_j}\int_{Q_j}\left(|f(x)| + \left|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy\right|\right)dx \le 2^{n+1}\alpha$$

Cela démontre la seconde inégalité dans (9.6).

Ensuite, on remarque que les cubes sélectionnés sont disjoints par définition de l'algorithme. Chaque cube sélectionné (9.8) satisfait $|Q_j| \le \frac{1}{\alpha}\int_{Q_j}|f(x)|dx$ par (9.8). En sommant,

$$\sum_j |Q_j| \le \frac{1}{\alpha}\sum_j \int_{Q_j} |f(x)|dx \le \frac{1}{\alpha}\int |f(x)|dx$$

ce qui démontre (9.5).

Étape 3. *Propriétés de la décomposition pour g.* Si $x \notin \cup_{j\in J} Q_j$, alors dans l'algorithme aucun des cubes qui contiennent x n'a été sélectionné. Cela signifie qu'il existe une suite de cubes dyadiques $Q^0 \supset Q^1 \supset ... \supset Q^m \supset ...$ tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$, Q^m est un cube de génération m non sélectionné et $x \in Q^m$. En appliquant le théorème de différentiation de Lebesgue, dans sa version avec des cubes donnée par l'exercice 5.2, on a

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{|Q^m|} \int_{Q^m} f(y)dy$$

pour presque tout $x \notin \cup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$. Comme $\frac{1}{|Q^m|}\int_{Q^m} |f(y)|dy \leq \alpha$ car Q^m n'a pas été sélectionné par (9.7), alors $|f(x)| \leq \alpha$. Donc $|g(x)| = |f(x)| \leq \alpha$ par (9.10).

Si $x \in Q_j$, alors par (9.10) et (9.12) on a $|g(x)| = \left|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy\right| \leq 2^n\alpha$. En combinant, on obtient $\|g\|_{L^\infty} \leq 2^n\alpha$ ce qui est la deuxième inégalité de (9.4).

Enfin, on décompose par (9.10):

$$\begin{aligned}\int |g(x)|dx &= \int_{(\cup_j Q_j)^c} |g(x)|dx + \int_{\cup_j Q_j} |g(x)|dx \\ &= \int_{(\cup_j Q_j)^c} |f(x)|dx + \sum_{j\in\mathbb{N}} \left|\int_{Q_j} f(x)dx\right| \leq \int |f(x)|dx\end{aligned}$$

ce qui démontre la première inégalité de (9.4).

□

2. Opérateurs à noyaux singuliers

Sous quelles conditions un opérateur T associé à un noyau K est-il continu sur L^p ? Le théorème suivant affirme que sous une hypothèse de régularité pour K appelée condition d'Hörmander, alors s'il existe un $p > 1$ pour lequel cet opérateur est continu sur L^p, alors il est continu pour tout $p \in (1, \infty)$. Ce résultat est pratique : il suffira donc de vérifier la continuité sur un seul espace L^p pour l'obtenir sur tous.

Theoreme 9.1. *Soit un opérateur T représenté par un noyau K satisfaisant* (9.1) *en dehors de l'origine, i.e. sous la forme* (9.2). *On suppose que K satisfait la condition dite d'Hörmander*

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|>2|y|} |K(x+y) - K(x)|dx = A < \infty \tag{9.13}$$

et on suppose de plus qu'il existe $1 < p \leq \infty$ tel que T est continu sur L^p avec $\|T(u)\|_{L^p} \leq B\|u\|_{L^p}$.

Alors pour tout $q \in (1, \infty)$, l'opérateur T est continu sur L^q avec

$$\|T(u)\|_{L^q} \leq C(n) \max(q, \frac{1}{q-1})(A+B)\|u\|_{L^q} \tag{9.14}$$

où $C(n)$ est une constante dépdendant seulement de la dimension, et T est continu de L^1 dans L^1 faible avec

$$\|T(u)\|_{L^{1,\infty}} \leq C(n)(A+B)\|u\|_{L^1}. \tag{9.15}$$

Proof. Dans la preuve, C désigne une constante qui peut changer d'une ligne à l'autre, mais qui dépend ne dépend pas des fonctions en jeu.

Étape 1. *Continuité de L^1 dans $L^{1,\infty}$.* Soit $u \in L^1$. Soit $\alpha > 0$. Soit $\gamma > 0$ qui sera fixé plus tard. On applique la décomposition $u = g + b$ du théorème 9.1 avec paramètre $\gamma\alpha$. On a alors puisque $|Tu| < |Tg| + |Tb|$ que

$$|\{x,\ |Tu(x)| > \alpha\}| \leq |\{x,\ |Tg(x)| > \alpha/2\}| + |\{x,\ |Tb(x)| > \alpha/2\}|. \tag{9.16}$$

Estimation des ensembles de niveaux pour g. Par (9.4) et l'inégalité de Hölder on a $g \in L^p$ avec $\|g\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1}^{1/p} \|g\|_{L^\infty}^{1-1/p} \leq \|u\|_{L^1}^{1/p} (2^n \gamma\alpha)^{1-1/p}$. Par hypothèse du théorème on a alors $\|Tg\|_{L^p} \leq CB\|u\|_{L^1}^{1/p} (\gamma\alpha)^{1-1/p}$. En appliquant la proposition 4.2 on a donc

$$\{x,\ |Tg(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{1}{(\frac{\alpha}{2})^p} \|Tg\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{\alpha} C 2^{(n+1)p} \gamma^{p-1} B^p \|u\|_{L^1}. \tag{9.17}$$

Estimation des ensembles de niveaux pour b. On rappelle que $b = \sum b_j \mathbb{1}_{Q_j}$. Soit B_j la boule de même centre que Q_j, et de rayon $\sqrt{n}\ell_j$ où ℓ_j et la longueur d'une arête de Q_j. On a

$$\{x,\ |Tb(x)| > \alpha/2\} = |\{x \in \cup_j B_j,\ |Tb(x)| > \alpha/2\}| + |\{x \in (\cup_j B_j)^c,\ |Tb(x)| > \alpha/2\}|. \tag{9.18}$$

Le premier terme est majoré par

$$|\{x \in \cup_j B_j,\ |Tb(x)| > \alpha/2\}| \leq \sum_j |B_j| \leq C \sum_j |Q_j| \leq C \frac{\gamma^{-1}}{\alpha} \|u\|_{L^1} \tag{9.19}$$

en utilisant (9.5) pour la dernière inégalité. Pour le deuxième on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} |\{x \in (\cup_j B_j)^c,\ |Tb(x)| > \alpha/2\}| &\leq \frac{2}{\alpha} \int_{x \in (\cup_j B_j)^c} |Tb(x)| dx \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \sum_{j'} \int_{x \in (\cup_j B_j)^c} |Tb_{j'}(x)| dx \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \sum_j \int_{x \in B_j^c} |Tb_j(x)| dx \end{aligned} \tag{9.20}$$

Fixons maintenant j et y_j le centre de Q_j. Pour $x \in B_j^c$ on a $x \notin Q_j$ donc $b_j(x) = 0$. En utilisant (9.2) puis $\int_{Q_j} b_j = 0$ on écrit

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x-y) b_j(y) dy = \int_{Q_j} (K(x-y) - K(x-y_j)) b_j(y) dy.$$

Pour tout $y \in Q_j$ on a $2|y - y_j| \leq \sqrt{n}\ell_j$ et pour tout $x \in B_j^c$ on a $|x - y_j| > \sqrt{n}\ell_j$, et donc $2|y - y_j| < |x - y_j|$. Par Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{x \in B_j^c} |Tb_j(x)| dx &\leq \int_{y \in Q_j} |b_j(y)| \int_{x \in B_j^c} |K(x-y) - K(x-y_j)| dx \\ &= \int_{y \in Q_j} |b_j(y)| \int_{|x| \geq \sqrt{n}\ell_j} |K(x + y_j - y) - K(x)| dx \\ &\leq \int_{y \in Q_j} |b_j(y)| \int_{|x| \geq 2|y - y_j|} |K(x + y_j - y) - K(x)| dx \\ &\leq A \int_{y \in Q_j} |b_j(y)| \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (9.13) pour la dernière inégalité. En injectant cette inégalité dans (9.20) on a

$$|\{x \in (\cup_j B_j)^c,\ |Tb(x)| > \alpha/2\}| \leq \frac{2}{\alpha} A \sum_j \int_{y \in Q_j} |b_j(y)| = \frac{2}{\alpha} A \|b\|_{L^1} \leq \frac{4}{\alpha} A \|u\|_{L^1} \tag{9.21}$$

où l'on a utilisé que $\|b\|_{L^1} \le \|u\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} \le 2\|u\|_{L^1}$ par (9.4) et (9.3). En injectant (9.19) et (9.21) dans (9.18) on obtient

$$|\{x,\ |T(x)| > \alpha/2\}| \le \frac{1}{\alpha} C(\gamma^{-1} + A)\|u\|_{L^1} \tag{9.22}$$

<u>Estimation des ensembles de niveaux pour u.</u> En injectant (9.17) et (9.22) dans (9.16), puis en choisissant $\gamma = 2^{-(n+1)} B^{-1}$ il vient

$$|\{x,\ |Tu(x)| > \alpha\}| \le \frac{1}{\alpha} C(2^{(n+1)p} C\gamma^{p-1} B^p + \gamma^{-1} + A)\|u\|_{L^1} \le \frac{1}{\alpha} C(B + A)\|u\|_{L^1}.$$

Cela démontre (9.15).

Étape 2. *Continuité de L^q dans L^q.* Puisque T est continu de L^1 dans $L^{1,\infty}$ avec (9.15) et de L^p dans L^p avec $\|Tu\|_{L^p} \le B\|u\|_{L^p}$, en appliquant les théorèmes d'interpolation de Marcienkiewicz et de Riesz-Thorin, sous la forme du résultat énoncé dans l'exercice 4.2, on a pour tout $1 < q \le p$ que T est continu sur L^q avec

$$\|Tu\|_{L^q} \le C(\frac{1}{q-1})^{\frac{1}{q}} (A + B)\|u\|_{L^q}. \tag{9.23}$$

En outre, on remarque par (9.2) que pour deux fonctions u et v, en faisant un changement de variable,

$$\int Tu(x)\overline{v(x)}dx = \int u(x)\overline{T^* v(x)}$$

avec T^* l'opérateur représenté par le noyau $\overline{K}(-x)$ et même constante L. Le noyau $\overline{K}(-x)$ satisfait aussi (9.13). Comme T est continu sur L^p, par dualité T^* est continu sur $L^{p'}$ pour p' l'exposant de Lebesgue conjugué de p avec $\|T^* u\|_{L^{p'}} \le B\|u\|_{L^{p'}}$. En appliquant (9.23) à l'opérateur T^*, on a pour tout $1 < q' < p'$ que T^* est continu sur $L^{q'}$ avec $\|T^* u\|_{L^{q'}} \le C(\frac{1}{q'-1})^{\frac{1}{q'}} (A + B)\|u\|_{L^{q'}}$. Par dualité, pour tout $p < q < \infty$, T est donc continu sur L^q avec

$$\|Tu\|_{L^q} \le C(\frac{1}{q'-1})^{\frac{1}{q'}} (A + B)\|u\|_{L^q} = C(q-1)^{\frac{q-1}{q}} (A + B)\|u\|_{L^q}. \tag{9.24}$$

En combinant (9.23) et (9.24), et en utilisant que $(\frac{1}{q-1})^{\frac{1}{q}} \le \max(\frac{1}{q-1}, q)$ et $(q-1)^{\frac{q-1}{q}} \le q$, on obtient l'inégalité désirée (9.14).

□

CHAPTER 10

Outils d'analyse harmonique IV : Théorème des multiplicateurs d'Hörmander Mihlin

1. Multiplicateurs de Fourier

Ajouter une introduction sur les multiplicateurs de Fourier. Donner des exemples.

2. Théorème d'Hörmander-Mihlin

Pour un multi-index $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on écrit $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$ et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. On écrit $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel.

Soit m une fonction à valeur complexes sur $\mathbb{R}^n$. On dit que m satisfait la condition de Mihlin s'il existe une constante A telle que m

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq A|\xi|^{-|\alpha|} \tag{10.1}$$

pour tout multi-index α avec $|\alpha| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. On dit que m satisfait la condition d'Hörmander s'il existe une constante A telle que

$$\sup_{R>0} R^{-n+2|\alpha|} \int_{R<|\xi|<2R} |\partial^\alpha m(\xi)|^2 d\xi \leq A^2. \tag{10.2}$$

On remarque que si m satisfait la condition de Mihlin (10.1), alors m satisfait la condition d'Hörmander (10.2) quitte à multiplier A par une constante qui ne dépend que de la dimension. La condition d'Hörmander (10.2) est donc plus générale que celle de Mihlin (10.1).

THEOREME 10.1. *Soit m une fonction à valeur complexes sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que m est une fonction bornée qui satisfait la condition d'Hörmander* (10.2). *Alors l'opérateur*

$$T(u) = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\mathcal{F}(u))$$

est continu sur L^p pour tout $1 < p < \infty$, et l'on a

$$\|T(u)\|_{L^p} \leq C(n) \max(p, \frac{1}{p-1})(A + \|m\|_{L^\infty}).$$

où $C(n)$ est une constante dépendant de la dimension uniquement.

PROOF. Dans la preuve, C désigne une constante qui peut changer de valeur d'une ligne à l'autre mais qui dépend seulement de la dimension.

Étape 1. *Partition dyadique en fréquence.* Soit $\chi \in C_c^\infty$ une fonction telle que $\chi(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq 1/2$ ou si $|\xi| \geq 2$, et telle que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi(2^{-j}\xi) = 1$. On pose $\chi_j(\xi) = \chi(2^{-j}\xi)$, $m_j(\xi) = \chi_j(\xi)m(\xi)$ et $K_j = \mathcal{F}^{-1}(m_j)$. Alors

$$m(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j(\xi).$$

Pour $J \in \mathbb{N}$ on pose (avec un léger abus de notation) $m_J(\xi) = \sum_{j=-J}^{J} m_j(\xi)$, $K_J = \mathcal{F}^{-1}(m_J)$ et $T_J(u) = \mathcal{F}^{-1}(m_J \mathcal{F}(u))$. Alors $K_J = \sum_{-J}^{J} K_j$, et puisque la transformée de Fourier échange produit et convolution

$$T_j(u) = K_J * u = \sum_{-J}^{J} K_j * u.$$

Comme m_j est une fonction bornée, à support compact, on a $K_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, comme $m_j(0) = 0$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x) dx = 0.$$

Étape 2. *Continuité et approximation sur* L^2. Soit $u \in L^2$. Alors par Parseval on a

$$\|T(u)\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(T(u))\|_{L^2} = \|m(\xi)\mathcal{F}(u)\|_{L^2} \leq \|m\|_{L^\infty} \|\mathcal{F}(u)\|_{L^2} = \|m\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}.$$

Donc T est continu sur L^2. De plus, on a de manière similaire par Parseval

$$\|T_J(u) - T(u)\|_{L^2} = \|(m_J - m)\mathcal{F}u\|_{L^2} \to 0$$

lorsque $J \to \infty$ car $m_J - m \to 0$ presque partout et $\mathcal{F}u \in L^2$. Donc pour toute fonction $u \in L^2$, on a que

$$Tu = \lim_{J \to \infty} K_J * u, \tag{10.3}$$

la limite ayant lieu dans L^2.

Étape 3. *Estimation sur les noyaux* K_j. On affirme qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\int |K_j| (2^{-j}|x|^{-1} + 2^j |x|)^{1/4} dx \leq CA \tag{10.4}$$

et

$$2^j \int |\nabla K_j| (2^{-j}|x|^{-1} + 2^j |x|)^{1/4} dx \leq CA. \tag{10.5}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. En effet, pour $j = 0$, on a pour tout multi-index $|\alpha| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, en utilisant la formule de Leibniz pour la différentiation,

$$|\partial^\alpha m_0| = |\partial^\alpha \chi m| \leq C \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} |\partial^{\alpha_1} \chi| |\partial^{\alpha_2} m|.$$

Donc, puisque $\chi(\xi) = 0$ en dehors de l'anneau $\{1/2 < |\xi| < 2\}$ et que χ est une fonction C^∞ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha m_0(\xi)|^2 d\xi = \int_{1/2<|\xi|<2} |\partial^\alpha m_0(\xi)|^2 d\xi \leq C \sum_{\alpha_2 \leq \alpha} \int_{1/2<|\xi|<2} |\partial^{\alpha_2} m|^2 d\xi \leq CA^2. \tag{10.6}$$

où l'on a noté $\alpha_2 \leq \alpha$ si $\alpha_{2,i} \leq \alpha_i$ pour $i = 1, ..., n$, et où l'on a utilisé (10.2) pour la dernière inégalité. Soit $n_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\int |K_0(x)| (|x|^{-1} + |x|)^{1/4} dx &= \int (1 + |x|)^{n_0} |K_0(x)| \frac{|(|x|^{-1} + |x|)^{1/4}}{(1 + |x|)^{n_0}} dx \\
&\leq \left(\int (1 + |x|)^{2n_0} |K_0(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(|x|^{-1} + |x|)^{1/2}}{(1 + |x|)^{2n_0}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int (1 + |x|^{2n_0}) |K_0(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $(1+|x|)^{2n_0} \leq C(1+|x|^{2n_0})$ pour une constante $C>0$, et que $2n_0-1/2 \geq n+1/2$ et donc la fonction $\frac{|(|x|^{-1}+|x|)^{1/2}}{(1+|x|)^{2n_0}}$ est intégrable. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \times ... \times x_n^{\alpha_n}$. Alors $1+|x|^{2n_0} \leq C\sum_{|\alpha|\leq n_0} x^{2\alpha}$. Par Parseval, et puisque la transformée de Fourier échange la multiplication par x_i avec la différentiation ∂_{ξ_i},

$$\int (1+|x|^{2n_0})|K_0(x)|^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq n_0} \int x^{2\alpha} K_0^2(x)dx = C \sum_{|\alpha|\leq n_0} \int |\partial^\alpha m_0(\xi)|^2 d\xi \leq CA^2$$

oú l'on a utilisé (10.6) pour la dernière inégalité. En combinant les deux inégalité ci-dessous, on obtient

$$\int |K_0(x)|(|x|^{-1}+|x|)^{1/4}dx \leq CA.$$

Les estimations pour K_j s'obtiennent alors à partir de la même estimation que pour K_0 et d'un changement d'échelle. En effet, on pose $\tilde{K}_j(x) = 2^{-j}K_j(2^{-j}x)$ et $\tilde{m}_j = \mathcal{F}\tilde{K}_j$. Alors $\mathcal{F}(\tilde{K}_j)(\xi) = \chi(\xi)m(2^{-j}\xi)$. On vérifie alors par (10.2) que $\tilde{m}_j$ satisfait la même estimation (10.6) que m_0. Donc $\int |\tilde{K}_j(x)|(|x|^{-1}+|x|)^{1/4}dx \leq CA$. En changeant de variable, on obtient $\int |K_j(x)|(2^{-j}|x|^{-1}+2^j|x|)^{1/4}dx \leq CA$. Cela démontre (10.4). La démonstration de (10.5) est similaire.

Étape 4. *Passage à la limite pour les noyaux.* Nous affirmons que

$$\lim_{J\to\infty} \int_{|x|<1} K_J(x)dx = L \in \mathbb{R} \tag{10.7}$$

qu'il existe une fonction mesurable K telle que K_J converge vers K presque partout, et qu'il existe $C>0$ telle que

$$\sup_{R>0} \int_{R<|x|<2R} |K_J(x)|dx \leq CA \tag{10.8}$$

pour tout $J \in \mathbb{N}$, et telle que

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|>2|y|} |K(x+y)-K(x)|dx \leq CA. \tag{10.9}$$

En particulier, par (10.8) et le lemme de Fatou on a

$$\sup_{R>0} \int_{R<|x|<2R} |K(x)|dx \leq CA \tag{10.10}$$

Finir la preuve en utilisant la localisation (10.4) **qui est plus précise que Grafakos**.

Étape 5. *Fin de la preuve.* Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\begin{aligned} T_J(u)(x) &= \int K_J(y)u(x-y)dy \\ &= \int_{|y|<1} K_J(y)u(x-y)dy + \int_{|y|>1} K_J(y)u(x-y)dy \\ &= \left(\int_{|y|<1} K_J(y)dy\right)u(x) + \int_{|y|<1} K_J(y)(u(x-y)-u(x))dy + \int_{|y|>1} K_J(y)u(x-y)dy \end{aligned}$$

On peut passer à la limite $J\to\infty$ dans chacun de ces termes, en utilisant (10.3) pour le membre de gauche, et pour le membre de droite (10.7) pour le premier terme, ainsi que $u \in C_c^\infty$ et que K_J converge vers K presque sûrement et la borne uniforme (10.8) pour les second et troisième termes, ce qui donne

$$T(u)(x) = Lu(x) + \int_{|y|<1} K(y)(u(x-y) - u(x))dy + \int_{|y|>1} K(y)u(x-y)dy.$$

Cette identité est (9.2), c'est-à-dire que T est représenté par le noyau K en dehors de l'origine. Comme T est continu sur L^2 avec norme d'opérateur $\|m\|_{L^\infty}$ par l'étape 2, et que K satisfait la condition d'Hörmander (9.13) par (10.9), on peut appliquer le théorème 9.1, ce qui donne le résultat désiré.

$\square$

CHAPTER 11

Le problème de Cauchy pour le système de Keller-Segel

Dans ce chapitre, nous introduisons la dernière équation du cours. Celle-ci fait intervenir conjointement tous les effets vus jusqu'alors, et contient des termes de diffusion, de transport quasilinéaire et de réaction.

Le système de Keller-Segel est

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla.(u\nabla\Phi_u), & \\ -\Delta\Phi_u = u, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & \end{cases} \tag{11.1}$$

d'inconnue le couple (u, Φ_u). On a utilisé la notation $\nabla.f = \partial_{x_1} f_1 + ... + \partial_{x_n} f_n$ pour l'opérateur de divergence. C'est un modèle pour l'évolution d'une densité de bactéries u. La première équation modélise deux effets simultanés : la diffusion dans l'espace et le déplacement dans la direction du gradient de la concentration Φ_u d'un marqueur chimique qu'elle relâche dans son environnement. En supposant que la sécrétion du marqueur chimique est proportionnelle à la densité u, et que celui-ci se diffuse si rapidement qu'il atteint une concentration d'équilibre, la deuxième équation modélise la loi de Fick à l'équilibre pour sa concentration.

En développant la dérivée et en utilisant que $-\Delta\Phi_u = u$, la première équation devient

$$u_t = \Delta u + u^2 - \nabla\Phi_u.\nabla u.$$

C'est donc une équation de la classe des équations d'advection-diffusion-reaction, qui additionne des effets de diffusion linéaire vu au chapitre 1, de transport non linéaire vu au chapitre 2, et de réaction par le terme u^2. Les idées pour résoudre le problème de Cauchy que nous allons développer seront formulées spécifiquement pour (11.1), mais elles s'appliquent pour toutes les équations d'advection-diffusion-reaction semi-linéaires.

1. Équation de Poisson sur l'espace entier

1.1. Formule de représentation. Pour résoudre le système de Keller-Segel (11.1), on commence par résoudre la deuxième équation. Considérons en premier l'équation de Laplace

$$-\Delta f = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lemme 11.1 (Solution fondamentale du Laplacien). *Pour $n \geq 2$, la fonction*

$$k(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & \text{en dimension } n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)|\mathbb{B}^d|}\dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{en dimension } n \geq 3, \end{cases}$$

où $\mathbb{B}^n$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $|\mathbb{B}^d|$ son volume, vérifie pour tout $x \neq 0$ que

$$\Delta k(x) = 0$$

et pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$*, avec* f *et ses dérivées jusquà l'ordre* 2 *bornées*

$$-\int_{\mathbb{R}^n} k(x)\Delta f(x)dx = f(0). \tag{11.2}$$

Remark 11.1. L'identité (11.2) s'écrit, au sens des distributions,

$$-\Delta k = \delta$$

où δ désigne le delta de Dirac en l'origine. La fonction k est donc la *fonction de Green* du Laplacien sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons déjà rencontré ce concept dans l'étude de l'équation de la chaleur : le noyau de la chaleur K est la fonction de Green pour l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta$, voir la remarque 1.1.

Pour la preuve du Lemme, nous aurons besoin du théorème de la divergence. Nous rappelons ce résultat, sans en donner la preuve, ci-dessous.

LEMME 11.2 (Théorème de la divergence). *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *tel que sa frontière* $\partial\Omega$ *soit de régularité* C^1*. Alors pour toute fonction vectorielle* $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *on a*

$$\int_\Omega \nabla . f(x)dx = \int_{\partial\Omega} f(x).\vec{\nu}(x)dS$$

où $\vec{\nu}(x)$ *est le vecteur unité pointant vers l'extérieur de* Ω *et* dS *est la mesure de surface sur* $\partial\Omega$*.*

PREUVE DU LEMME 11.1. On rappelle que pour une fonction radiale $f(x) = f(r)$ avec $r = |x|$ le Laplacien s'écrit

$$\Delta f(r) = \partial_{rr} f + \frac{n-1}{r}\partial_r f.$$

On a donc si $n \geq 3$

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = (n-2)(n-1)\frac{1}{r^n} - \frac{n-1}{r}(n-2)\frac{1}{r^{n-1}} = 0.$$

D'autre part, $\Delta(\ln r) = 0$ si $n = 2$. Donc $\Delta k = 0$.

Pour démontrer (11.2), on décompose pour $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^n} k(x)\Delta f(x)dx &= -\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} k(x)\Delta f(x)dx - \int_{B(0,\epsilon)} k(x)\Delta f(x)dx \\ &= I(\epsilon) + R_1(\epsilon) \end{aligned}$$

où $B(0,\epsilon)$ est la boule de rayon ϵ. Puisque Δf est bornée on a pour le premier reste

$$|R_1(\epsilon)| \leq C\int_{B(0,\epsilon)} k(x)dx \leq \begin{cases} C\epsilon^2|\ln\epsilon| & \text{si } n = 2, \\ C\epsilon^2 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Par l'identité $k\Delta f = \nabla.(k\nabla f) - \nabla k.\nabla f$ on écrit

$$\begin{aligned} I(\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} \nabla k(x).\nabla f(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} \nabla.(k\nabla f)(x)dx \\ &= J(\epsilon) + R_2(\epsilon). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la divergence (Lemme 11.2) on a pour le second reste

$$R_2(\epsilon) = -\int_{S(0,\epsilon)} k(x)\nabla f(x).\vec{\nu}(x)dS$$

où $S(0,\epsilon)$ est la sphère de rayon ϵ, et pour $x \in S(0,\epsilon)$, $\vec{\nu}(x) = -\frac{x}{|x|}$ est son vecteur normal pointant vers l'origine. Puisque ∇f est bornée,

$$|R_2(\epsilon)| \leq C \int_{S(0,\epsilon)} k(x)dS \leq \begin{cases} C\epsilon|\ln\epsilon| & \text{si } n=2, \\ C\epsilon & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Par l'identité $\nabla k.\nabla f = \nabla.(f\nabla k) - f\Delta k$, et puisque $\Delta k = 0$, on a

$$J(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \nabla.(f\nabla k)(x)dx.$$

En utilisant à nouveau le théorème de la divergence (Lemme 11.2)

$$J(\epsilon) = \int_{S(0,\epsilon)} f(x)\nabla k(x).\vec{\nu}(x)dS.$$

Or $\nabla k(x) = -\frac{1}{n|\mathbb{B}^n|}\frac{x}{|x|^n}$, et donc pour $x \in S(0,\epsilon)$ on a $\nabla k(x).\vec{\nu}(x) = \frac{1}{n|\mathbb{B}^n|\epsilon^{n-1}}$. Puisque la surface de la sphere de rayon ϵ est précisément $|S(0,\epsilon)| = n|\mathbb{B}^n|\epsilon^{n-1}$,

$$J(\epsilon) = \frac{1}{|S(0,\epsilon)|}\int_{S(0,\epsilon)} f(x)dS$$

est la moyenne de f sur la sphere $S(0,\epsilon)$. Comme f est continue en 0, $J(\epsilon) \to f(0)$ lorsque $\epsilon \to 0$. D'où (11.2).

□

Considérons maintenant l'équation de Poisson

$$-\Delta f = g, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{11.3}$$

PROPOSITION 11.1 (Résolution de l'équation de Poisson). *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, avec u et ses dérivées jusqu'à l'ordre deux bornées. Alors la fonction*

$$\begin{aligned}\Phi_u(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(y)k(x-y)dy \\ &= \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u(y)\log|x-y|dy & \textit{en dimension } n=2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)|\mathbb{B}^n|}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{u(y)}{|x-y|^{n-2}}dy & \textit{en dimension } n \geq 3, \end{cases}\end{aligned} \tag{11.4}$$

est de classe C^2 et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$-\Delta\Phi_u(x) = u(x). \tag{11.5}$$

PROOF. On a par un changement de variable $\Phi_u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)k(y)dy$. On vérifie donc, puisque u est deux fois différentiable, que l'on peut appliquer deux fois le théorème de différentiation sous le signe intégral, et obtenir ainsi que $\Phi_u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\partial^\alpha\Phi_u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial^\alpha u(x-y)\right)k(y)dy.$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq 2$. En particulier,

$$\Delta\Phi_u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u(x-y)k(y)dy.$$

En appliquant (11.2) avec la fonction $f(y) = u(x-y)$,

$$-\Delta\Phi_u(x) = u(x).$$

Ainsi, Φ_u est bien une solution de (11.5).

□

1.2. Estimations sur les espaces de Lebesgues. La formule de représentation (11.4) permet de résoudre l'équation de Poisson (11.3). Nous allons maintenant démontrer une estimation précise qui permet de borner $\nabla\Phi_u$ en fonction de u dans des espaces de Lebesgue. Le premier outil pour obtenir cette estimation est l'injection de Sobolev.

PROPOSITION 11.2 (Estimation pour l'équation de Poisson dans les espaces de Lebesgue). *Soit pour $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, Φ_u donnée par la formule* (11.4) *et $\nabla\Phi_u$ son gradient. Alors pour tout $1 < p < n$ et q tel que $q = \frac{pn}{n-p} \in (\frac{n}{n-1}, \infty)$ on a*

$$\|\nabla\Phi_u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{11.6}$$

pour une constante $C = C(n,p,q)$. En particulier, $\nabla\Phi_u$ s'étend en une application linéaire continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Pour démontrer la proposition 11.2, nous avons besoin des injections de Sobolev rappelées ci-dessous.

LEMME 11.3 (Injection de Sobolev homogène). *Pour $1 \leq p < n$ on pose $q = \frac{pn}{n-p}$. Alors il existe $C > 0$ telle que pour tout $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on a $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec*

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\sum_{j=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_j} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{11.7}$$

PROOF. On rappelle l'inégalité usuelle de Sobolev : il existe $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_j} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) \tag{11.8}$$

pour tout $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. On va maintenant obtenir (11.7) par un argument de redimensionnement. Pour $\lambda > 0$ on pose $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$ et on applique (11.8) à f_λ :

$$\|f_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) \tag{11.9}$$

On calcule par un changement de variable

$$\|f_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q}.$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial x_i} f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i} f(x/\lambda)$ on a de même

$$\sum_{j=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{\frac{n}{p}-1}\sum_{j=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_j} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

L'inégalité (11.9) s'écrit donc $\|f\|_{L^q} \leq C\lambda^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^p} + C\lambda^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-1}\sum_{j=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_j} f\|_{L^p}$, après division par $\lambda^{n/q}$. Or $\frac{n}{p} - \frac{n}{q} = 1$, donc

$$\|f\|_{L^q} \leq C\lambda\|f\|_{L^p} + C\sum_{j=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_j} f\|_{L^p}.$$

En faisant tendre λ vers 0, on obtient l'inégalité désirée (11.7).

$\square$

Preuve de la Proposition 11.2. On note par $\hat{u}$ la transformée de Fourier d'une fonction u. On rappelle qu'elle échange dérivation et multiplication par les coordonnées : $\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j} f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$. En particulier,

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{f}(\xi).$$

Par (11.5) on a donc pour $\xi \neq 0$

$$\widehat{\Phi_u}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2} \hat{u}(\xi).$$

En différentiant, on obtient alors pour $j = 1, ..., n$,

$$\widehat{\partial_{x_j} \Phi_u}(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|^2} \hat{u}(\xi)$$

et pour $k = 1, ..., n$,

$$\widehat{\partial^2_{x_j x_k} \Phi_u}(\xi) = -\frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \hat{u}(\xi) =: m_{j,k}(\xi) \hat{u}(\xi).$$

On a par une estimation directe que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^l$ avec $|\alpha| = l$ que

$$|\partial^\alpha m_{j,k}| \leq C_l \frac{1}{|\xi|^{|\alpha|}}$$

pour une constante C_l dépendant seulement de l. Par le théorème 10.1 des multiplicateurs de Hörmander-Mihlin,

$$\|\partial^2_{x_j x_k} \Phi_u\|_{L^p} \lesssim \|u\|_{L^p}. \tag{11.10}$$

Revenons maintenant à la formule (11.4). Puisque u est à support compact, on a en différentiant pour x loin de l'origine

$$|\nabla \Phi_u(x)| \leq C(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \lesssim \frac{1}{|x|^{n-1}}. \tag{11.11}$$

Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction de localisation, telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq 0$. Pour $i \in \{1, ..., n\}$ on pose alors $\chi_R(x) = \chi(x/R)$, et $\Psi_R = \chi_R \partial_{x_i} \Phi_u$. Alors pour $j \in \{1, ...n\}$

$$\partial_{x_j} \Psi_R = \partial_{x_j} \chi_R \partial_{x_i} \Phi_u + \chi_R \partial^2_{x_i x_j} \Phi_u.$$

Par l'injection de Sobolev homogene (11.7)

$$\|\Psi_R\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^n \|\partial_{x_j} \chi_R \partial_{x_i} \Phi_u\|_{L^p} + C \sum_{j=1}^n \|\chi_R \partial^2_{x_i x_j} \Phi_u\|_{L^p} \tag{11.12}$$

Par convergence dominée on a $\Psi_R \to \partial_{x_i} \Phi_u$ dans L^q et $\chi_R \partial^2_{x_i x_j} \Phi_u \to \Phi_u$ dans L^p lorsque $R \to \infty$. En combinant l'identité $\partial_{x_j} \chi_R(x) = R^{-1} \partial_{x_j} \chi(x/R)$ et l'estimation (11.11) on a

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_j} \chi_R \partial_{x_i} \Phi_u\|_{L^p} &\lesssim \|\frac{\mathbb{1}(R \leq |x| \leq 2R)}{R|x|^{n-1}}\|_{L^p} \\ &= \frac{1}{R^{n(1-\frac{1}{p})}} \|\frac{\mathbb{1}(1 \leq |x| \leq 2)}{|x|^{n-1}}\|_{L^p} \to 0 \end{aligned}$$

lorsque $R \to \infty$ (où l'on a utilisé un changement de variable). Donc en laissant $R \to \infty$ dans (11.12) on obtient

$$\|\partial_{x_i} \Phi_u\|_{L^q} \leq C \sum_{j=1}^n \|\partial^2_{x_i x_j} \Phi_u\|_{L^p}.$$

En estimant le membre de droite par (11.10), on obtient (11.6).

□

2. Résolution du problème de Cauchy dans les espaces de Lebesgue

Nous cherchons maintenant à établir l'existence de solutions pour le système de Keller-Segel (11.1). On remarque qu'étant donnée u, on peut résoudre la deuxième équation grâce à la proposition 11.1. Ainsi, le système de Keller-Segel est réduit à une unique équation d'évolution :

$$u_t = \Delta u - \nabla.(u \nabla \Phi_u), \qquad \Phi_u = k * u. \tag{11.13}$$

Par abus de langage, on parlera dorénavant simplement de la solution u, au lieu de la solution (u, Φ_u).

Pour démontrer l'existence de solutions, nous allons d'abord considérer des solutions dans un sens faible, dites solutions intégrales. Nous démontrerons par la suite que celles-ci sont en fait régulières et que ce sont des solutions classiques. C'est là un principe qui se retrouve souvent pour la résolution d'équations aux dérivées partielles : il est plus facile de démontrer l'existence et l'unicité de solutions en un sens affaibli dans un premier temps, puis de démontrer leurs propriétés de régularité dans un second temps.

Definition 11.1. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$*,* $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $T > 0$*. On dit que* u *est une solution intégrale dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *du système* (11.1) *si* $u \in C([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$*, si* $\nabla \Phi_u = \nabla(k * u)$*, si* $S(t - \cdot)(\nabla.(u \nabla \Phi_u)(\cdot)) \in L^1([0,t], L^p)$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et si*

$$u(t, \cdot) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(u \nabla \Phi_u)(s, \cdot)\right) ds \tag{11.14}$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Dans quels espaces de Lebesgue peut-on s'attendre à ce que le problème de Cauchy soit bien posé ? Une règle générale est de voir quelles limitations sont imposées par les symétries de l'équation. Tous les faits suivants font l'objet de l'exercice 11.2. Premièrement, Il existe une invariance d'échelle pour l'équation, car si u est une solution, alors $\lambda^{-2} u(\lambda^{-2} t, \lambda^{-1} x)$ est aussi une solution, pour tout $\lambda > 0$. Deuxièmement, on a que $\|\lambda^{-2} u_0(\lambda^{-1} x)\|_{L^p} = \lambda^{n/p-2} \|u_0\|_{L^p}$, et donc que $\|\lambda^{-2} u_0(\lambda^{-1} x)\|_{L^p} \to \infty$ ou 0 si $p > n/2$ ou $p < n/2$. On dira que L^p est un espace surcritique si $p > n/2$, critique si $p = n/2$, ou sous-critique si $p < n/2$. Le calcul précédent montre que dans un espace surcritique, la concentration sur de petites échelles d'espace λ conformément à l'invariance de l'équation implique que la norme L^p tend vers ∞. Dans un espace sous-critique, ce n'est pas le cas: on peut avoir des données initiales très concentrées en gardant la norme L^p bornée. Puisque pour une solution à l'échelle λ, l'échelle de temps caractéristique est λ^2, alors des solutions très concentrées (i.e. λ petit) évoluent très rapidement. Un espace sous-critique permet d'avoir des données initiales à des échelles d'espace arbitrairement petites, et donc des solutions qui évoluent arbitrairement rapidement en temps. La topologie de ces espaces ne permet donc pas de contrôler l'évolution temporelle. On s'attend donc à ce que l'équation soit mal posée dans les espaces sous-critiques. Un énoncé précis fait l'objet de l'exercice 11.2.

En l'absence d'autres obstructions, on s'attend par contre pour les mêmes raisons formelles à ce que l'équation soit bien posée dans les espaces surcritiques. Cela est vrai et fait l'objet du théorème suivant.

THEOREME 11.1. *Si $\frac{n}{2} < p < n$, alors pour $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ il existe $T_0(\|u_0\|_{L^p}) > 0$ et une unique solution intégrale u dans L^p du système de Keller-Segel sur $[0, T_0(\|u_0\|_{L^p})]$.*

De plus, si $v_0 \in L^p$, alors pour $R = \max(\|u_0\|_{L^p}, \|v_0\|_{L^p})$ on a pour tout $0 \leq t \leq T_0(R)$ que

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^p} \leq 2\|u_0 - v_0\|_{L^p}.$$

Remark 11.2. Le théorème ci-dessus peut être étendu à l'espace critique $p = \frac{n}{2}$ en dimension $n \geq 3$. En revanche, il ne peut pas être étendu aux espaces sous-critiques. Cette extension est faite dans l'exercice 11.4.

Pour démontrer le théorème, on remarque que dans (11.14) apparait le terme $S(t-s)(\nabla.(u\nabla\Phi_u(s)))$. Pour s fixé, cette fonction est la solution de l'équation de la chaleur sur $[s, \infty)$ qui vaut $\nabla.(u\nabla\Phi_u(s))$ en $t = s$. Nous aurons besoin du lemme suivant qui estime sa taille dans les espaces de Lebesgue.

LEMME 11.1. *Soit $n \geq 2$, et $\frac{n}{2} < p < n$ et $q > \frac{n}{2}$. Alors il existe $C > 0$ telle que si $u \in L^p$ et $v \in L^q$ on a que $S(t)(\nabla.(v\nabla\Phi_u)) \in L^r$ pour tout $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n})^{-1} \leq r \leq \infty$ avec*

$$\|S(t)(\nabla.(v\nabla\Phi_u))\|_{L^r} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{n})+\frac{1}{2}}}\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}. \tag{11.15}$$

PROOF. Par la Proposition 11.2, pour $u \in L^p$ on a $\nabla\Phi_u \in L^a$ pour $\frac{1}{a} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ avec

$$\|\nabla\Phi_u\|_{L^a} \leq C\|u\|_{L^p}.$$

Donc par l'inégalité de Hölder $v\nabla\Phi_u \in L^b$ pour $\frac{1}{b} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ avec

$$\|v\nabla\Phi_u\|_{L^b} \leq \|v\|_{L^q}\|\nabla\Phi_u\|_{L^a} \leq C\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

Par la proposition 1.1, on rappelle que $S(t)f = K(t) * f$. Puisque $(\partial_{x_i}K(t)) * f = K(t) * (\partial_{x_i}f)$ on a $S(t)(\nabla.(v\nabla\Phi_u)) = \nabla.(S(t)(v\nabla\Phi_u))$. En utilisant cette identité, et le lemme 6.13 des estimations du semi-groupe de la chaleur sur les espaces de Lebesgue, tel qu'énoncé dans la variante (6.18), on a $S(t)(\nabla.(v\nabla\Phi_u)) \in L^r$ pour tout $r \geq b$ avec

$$\|S(t)(\nabla.(v\nabla\Phi_u))\|_{L^r} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{b}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}}}\|v\nabla\Phi_u\|_{L^b} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{n}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}}}\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

Cela démontre le résultat.

□

PREUVE DU THÉORÈME 11.1. Dans ce qui suit, $C > 0$ désigne une constante indépendante des autres paramètres, dont la valeur exacte peut changer d'une ligne à l'autre.

Étape 1. *Mise en place du problème de point fixe.* Pour $0 < T \leq 1$ on définit l'espace de Banach $X = C([0, T], L^p)$ de norme

$$\|v\|_X = \sup_{t\in[0,T]} \|v(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

On écrit $B_X(2\|u_0\|_{L^p})$ la boule de X de rayon $2\|u_0\|_{L^p}$. On considère alors l'application

$$\Phi(v)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\left(v^2(s)\right) ds. \tag{11.16}$$

On va construire une fonction u qui est un point fixe de Φ dans $B_X(2\|u_0\|_{L^p})$ pour T assez petit, ce qui donnera l'existence de la solution intégrale recherchée.

Étape 2. *Preuve que $\Phi : B_X(2\|u_0\|_{L^p}) \to B_X(2\|u_0\|_{L^p})$.* Nous affirmons que si T est assez petit, alors $\Phi : B_X(2\|u_0\|_{L^p}) \to B_X(2\|u_0\|_{L^p})$. Cette affirmation est une conséquence de l'estimation (11.18), et de la propriété de continuité que nous montrons ci-dessous. On se fixe maintenant un élément $v \in B_X(2\|u_0\|_{L^p})$.

Preuve de la borne L^p. En appliquant (11.15) avec les exposants $q = r = p$,

$$\|S(t-s)(\nabla.(v(s)\nabla\Phi_{v(s)}))\|_{L^p} \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p}-\frac{1}{n})+\frac{1}{2}}}\|v(s)\|_{L^p}^2 \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}}\|v\|_X^2.$$

On estime alors en faisant le changement de variable $s = \tau t$

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(v(s)\nabla\Phi_{v(s)})\right)ds\right\|_{L^p} &\leq \int_0^t \|S(t-s)\left(\nabla.(v(s)\nabla\Phi_{v(s)})\right)\|_{L^p}ds \\ \leq C\|v\|_X^2\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} &= C\|v\|_X^2 t^{1-\frac{n}{2p}}\int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{\frac{n}{2p}}} \leq C\|v\|_X^2 t^{1-\frac{n}{2p}}\end{aligned} \tag{11.17}$$

où l'on a utilisé pour la dernière inégalité que $\frac{n}{2p} < 1$ et donc $\int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{\frac{n}{2p}}} < \infty$. En injectant l'estimation (6.13) pour $S(t) : L^p \to L^p$ et (11.17) dans (11.16) on a alors $\Phi(v)(t) \in L^p$ avec

$$\|\Phi(v)(t)\|_{L^p} \leq \|S(t)u_0\|_{L^p} + \left\|\int_0^t S(t-s)\left(v^2(s)\right)ds\right\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{L^p} + C\|v\|_X^2 t^{1-\frac{n}{2p}}.$$

Donc comme $0 \leq t \leq T$ et $\|v\|_X \leq 2\|u_0\|_{L^p}$ on a

$$\|\Phi(v)(t)\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{L^p} + C\|u_0\|_{L^p}^2 T^{1-\frac{n}{2p}} \leq 2\|u_0\|_{L^p} \qquad \text{pour } 0 < t \leq T. \tag{11.18}$$

pour T assez petit pour que $C\|u_0\|_{L^p}T^{1-\frac{n}{2p}} \leq 1$.

Preuve de la continuité $[0,T] \to L^p$. On fixe un $t_0 \in (0,T)$, et on va montrer la continuité en t_0. Soit $\epsilon > 0$. Soit $\eta > \nu > 0$ et $t \in [t_0-\nu, t_0+\nu]$. On décompose (11.16) en utilisant la propriété (iii) de la définition 6.1

$$\Phi(v)(t) = S(t)u_0 + S(t-t_0+\eta)\int_0^{t_0-\eta} S(t_0-\eta-s)\nabla.(v\nabla\Phi_v)ds + \int_{t_0-\eta}^t S(t-s)\nabla.(v\nabla\Phi_v)ds$$

$$\Phi(v)(t_0) = S(t_0)u_0 + S(\eta)\int_0^{t_0-\eta} S(t_0-\eta-s)\nabla.(v\nabla\Phi_v)ds + \int_{t_0-\eta}^{t_0} S(t-s)\nabla.(v\nabla\Phi_v)ds.$$

On obtient alors l'expression suivante pour la différence

$$\begin{aligned}\Phi(v)(t) - \Phi(v)(t_0) &= S(t)u_0 - S(t_0)u_0 \\ &\quad + (S(t-t_0+\eta) - S(\eta))\int_0^{t_0-\eta} S(t_0-\eta-s)\nabla.(v\nabla\Phi_v)(s)ds \\ &\quad + \int_{t_0-\eta}^t S(t-s)\nabla.(v\nabla\Phi_v)(s)ds \\ &\quad - \int_{t_0-\eta}^{t_0} S(t_0-s)\nabla.(v\nabla\Phi_v)(s)ds \\ &= I + II + III + IV\end{aligned}$$

On estime III par un calcul très similaire à (11.17), qui donne

$$\left\|\int_{t_0-\eta}^t S(t-s)\nabla.(v\nabla\Phi_v)(s)ds\right\|_{L^p} \leq C\|v\|_X^2\int_{t_0-\eta}^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \leq C\|u_0\|_{L^p}^2 t^{1-\frac{n}{2p}}\int_{\frac{t_0-\eta}{t}}^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{\frac{n}{2p}}}.$$

On a que $\frac{t_0-\eta}{t} \to 1$ lorsque η tend vers 0. On choisit donc η assez petit pour que $\|III\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{3}$. Le terme IV peut être estimé de la même manière, et donc on a aussi $\|IV\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{3}$ pour η assez petit. Enfin, on a que $I \to 0$ et $II \to 0$ dans L^p lorsque $t \to t_0$ par la propriété (iv) de la définition 6.1. Donc en choisissant ν assez petit, $\|I + II\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{3}$. En combinant, on trouve $\|\Phi(v)(t) - \Phi(v)(t_0)\|_{L^p} \leq \epsilon$ pour tout $t \in [t_0 - \nu, t_0 + \nu]$. Cela démontre la continuité à valeur dans L^p en t_0. La continuité en $t_0 = 0$ et en $t_0 = T$ se démontre d'une manière similaire, et donc $\Phi(v) \in C([0, T], L^p)$.

Étape 3. *Preuve que Φ est une contraction sur $B_X(2\|u_0\|_{L^p})$.* On se donne deux éléments $u, v \in B_X(2\|u_0\|_{L^p})$. Alors par (11.16),

$$\begin{aligned}\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t) &= \int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(v\nabla\Phi_v(s))\right) ds - \int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(u\nabla\Phi_u(s))\right) ds \\ &= \int_0^t S(t-s)\nabla.\left((v-u)\nabla\Phi_v(s) + u\nabla\Phi_{v-u}(s)\right) ds\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la linéarité de $S(t)$ et de Φ. On effectue maintenant un calcul très similaire à la preuve de la borne L^p à l'étape 2. En appliquant (11.15) avec les exposants $p = q = r$,

$$\begin{aligned}\|S(t-s)\nabla.((v-u)\nabla\Phi_v)\|_{L^p} &\leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}}\|v(s)\|_{L^p}\|v(s)-u(s)\|_{L^p} \\ &\leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}}\|v\|_X\|v-u\|_X.\end{aligned}$$

De même, $\|S(t-s)\nabla.(u\nabla\Phi_{v-u}(s))\|_{L^p} \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}}\|u\|_X\|v-u\|_X$. En effectuant le même calcul que pour (11.17),

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t S(t-s)\nabla.\left((v-u)\nabla\Phi_v(s) + u\nabla\Phi_{v-u}(s)\right) ds\right\|_{L^p} \\ &\leq C(\|u\|_X + \|v\|_X)\|u-v\|_X \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \leq C(\|u\|_X + \|v\|_X)\|u-v\|_X t^{1-\frac{n}{2p}}\end{aligned}$$

Donc, comme $u, v \in B_X(2\|u_0\|_{L^p})$ on a

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(v\nabla\Phi_v(s))\right) ds - \int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(u\nabla\Phi_u(s))\right) ds\right\|_{L^p} \\ &\leq C(\|u\|_X + \|v\|_X)\|u-v\|_X t^{1-\frac{n}{2p}} \leq CT^{1-\frac{n}{2p}}\|u_0\|_{L^p}\|u-v\|_X \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_X\end{aligned} \tag{11.19}$$

si T est assez petit pour que $CT^{1-\frac{n}{2p}}\|u_0\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$. Donc $\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_X \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_X$, et Φ est une contraction.

Étape 4. *Fin de la preuve.* Par les étapes 2 et 3, Φ est une contraction sur $B_X(2\|u_0\|_{L^p})$. Donc Φ admet un unique point fixe u par le théorème de Banach. On de plus que u satisfait que $s \mapsto S(t-s)\nabla.(u\nabla\Phi_u)(s) \in L^1([0,t], L^p)$ pour tout $t \in [0, T]$ par le calcul menant à (11.17) et que u satisfait (11.14) car $\Phi(u) = u$. Donc u est bien une solution intégrale du système de Keller-Segel.

En remarquant que toute solution intégrale est un point fixe de Φ si T est assez petit, l'unicité des solutions intégrales découle de l'unicité du point fixe de Φ.

Finalement, soient $u_0, v_0 \in L^p$ et $R = \max(\|u_0\|_{L^p}, \|v_0\|_{L^p})$ et u et v les deux solutions intégrales sur $[0, T(R)]$ correspondantes. Soit X l'espace associé au temps

$T(R)$. Alors $\|u\|_X \leq 2R$ et $\|v\|_X \leq 2R$ de par la construction précédente. On a

$$u(t)-v(t) = S(t)u_0 - S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(u\nabla\Phi_u(s))\right) ds - \int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(v\nabla\Phi_v(s))\right) ds.$$

Comme par (6.13) on a $\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_X \leq \|u_0 - v_0\|_{L^p}$ et par (11.19) on a

$$\left\| \int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(u\nabla\Phi_u(s))\right) ds - \int_0^t S(t-s)\left(\nabla.(v\nabla\Phi_v(s))\right) ds \right\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_X$$

on en déduit que $\|u-v\|_X \leq \|u_0-v_0\|_{L^p} + \frac{1}{2}\|u-v\|_X$, et donc $\|u-v\|_X \leq 2\|u_0-v_0\|_{L^p}$ comme désiré.

□

3. Régularisation parabolique

PROPOSITION 11.1. *Soit u une solution donnée par le théorème 11.1. Alors $u \in C^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)$, et pour tout $0 < t_0 < T$, u et toutes ses dérivées sont bornées sur $[t_0,T]\times\mathbb{R}^n$. De plus, u est une solution classique de* (11.1) *sur* $(0,T]\times\mathbb{R}^n$.

La preuve de la proposition repose sur des gains d'intégrabilités et des gains de réglarités qui font l'objet des deux sous-sections suivantes. Ces gains sont appelés paraboliques car ils sont dus à l'effet de diffusion de l'équation.

3.1. Gain d'intégrabilité.

PROPOSITION 11.2. *On suppose que u est une solution intégrale dans L^p pour un $\frac{n}{2} < p < n$ et que de plus $u \in C([0,T_0],L^q)$ pour un $q > \frac{n}{2}$.*

- *Si $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{2}{n} \geq 0$, alors pour tout $q \leq r < (\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{2}{n})^{-1}$ on a $u \in C((0,T_0],L^r)$. On utilise la convention que $(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{2}{n})^{-1} = \infty$ si $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{2}{n} = 0$.*
- *Si $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{2}{n} < 0$ alors pour tout $q \leq r \leq \infty$ on a $u \in C((0,T_0],L^r)$.*

COROLLAIRE 11.1. *Si $\frac{n}{2} < p < n$, et u est une solution intégrale dans L^p du système de Keller-Segel, alors $u \in C((0,T],L^\infty(\mathbb{R}^n)))$.*

L'idée de la preuve du corollaire est d'appliquer la proposition 11.2 itérativement. On appelle une telle technique un bootstrap d'intégrabilité parabolique.

PREUVE DU COROLLAIRE. On pose $\alpha = \frac{2}{n} - \frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-p\alpha)}$. Alors $\frac{1}{p} > \alpha > 0$ car $\frac{n}{2} < p < n$ et donc $\beta > 1$. On a également $\frac{1}{\beta} > 1 - \alpha p$. On vérifie alors que pour tout $p \leq q \leq \alpha^{-1}$, l'exposant $r = \beta q$ satisfait

$$q \leq r = \beta q < (\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{2}{n})^{-1} = (\frac{1}{q}-\alpha)^{-1}.$$

En appliquant la proposition 11.2, $u \in C((0,T],L^{q_1}(\mathbb{R}^n))$ avec $q_1 = \beta p$. Si $q_1 \geq 1/\alpha$ on s'arrête. Si $q_1 < 1/\alpha$, alors on applique une nouvelle fois le lemme 11.2 mais avec l'exposant $q = q_1$, et on obtient $u \in C((0,T],L^{q_2}(\mathbb{R}^d))$ avec $q_2 = \beta q_1 = \beta^2 p$. Si $q_2 < 1/\alpha$, on itère une nouvelle fois cette procédure. Au bout de la k-ième itération on a obtenu que $u \in C((0,T],L^{q_k}(\mathbb{R}^d))$ pour un exposant $q_k = \beta^k p$. En un nombre fini d'itérations, on obtient bien $q_k \geq 1/\alpha$.

On applique alors le lemme 11.2 avec l'exposant q_k, et on obtient $u \in C((0,T],L^\infty(\mathbb{R}^n)))$.

□

Preuve de la proposition 11.2. .

On écrit $u = v + w$ avec $v = S(t)u_0(\cdot)$ et $w = \int_0^t S(t-s)\,(\nabla.(u\nabla\Phi_u)(s,\cdot))\,ds$. On écrit $\|f\|_X = \sup_{[0,T]}\|f(t)\|_{L^p} + \sup_{[0,T]}\|f(t)\|_{L^q}$.

Étape 1. *Étude de v.* Nous montrons d'abord que $v \in C((0,T], L^{\tilde r})$ pour tout $q \le \tilde r \le \infty$. Par densité, il existe $u_{0,n} \in C_c^\infty$ telle que $u_{0,n} \to u$ dans L^p. On pose $v_n(t) = S(t)u_{0,n}$. On vérifie par (1.21) que puisque $u_{0,n}$ est à support compact, alors $v_n(t,x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$ pour tout n uniformément en temps $t \in [0,T]$. En utilisant que $v_n \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R}^n)$ par la Proposition 6.1, on en déduit que $v_n \in C((0,T], L^\infty)$. De plus, par (6.13) on a pour tout $0 < t_0 \le T$ que pour $t_0 \le t \le T$,

$$\|v_n(t) - v(t)\|_{L^\infty} = \|S(t)(u_{0,n} - u_0)\|_{L^\infty} \le \frac{C}{t^{\frac{n}{2p}}}\|u_{0,n} - u_0\|_{L^p} \le \frac{C}{t_0^{\frac{n}{2p}}}\|u_{0,n} - u_0\|_{L^p}.$$

Donc $\sup_{t_0 \le t \le T}\|v_n(t) - v(t)\|_{L^\infty} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En passant à la limite on obtient $v \in C([t_0,T], L^\infty)$. Comme t_0 est arbitraire, $v \in C((0,T], L^\infty)$. La preuve pour $p \le \tilde r < \infty$ est similaire, et plus simple, nous l'omettons.

Étape 2. *Étude de w.* On pose $M = \sup_{0 \le t \le T}\|u(t)\|_{L^q}$.

<u>Cas $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n} \ge 0$.</u> En utilisant le lemme 11.1 on obtient

$$\|w(t)\|_{L^r} \le \int_0^t \|S(t-s)\nabla.(u\nabla\Phi_u)\|_{L^r}ds \le C\|u\|_X^2 \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\gamma}$$

avec $\gamma = \frac{n}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} - \frac{1}{r}) + \frac{1}{2}$. Comme $r < (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2}{n})^{-1}$ on a que $\gamma < 1$ et donc $\sup_{0 \le t \le T}\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\gamma} = T^{1-\gamma}\int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^\gamma} < \infty$. Donc $w(t) \in L^r$ avec $\|w(t)\|_{L^r} \le C\|u\|_X^2$.

On a donc $\sup_{0 \le t \le T}\|w(t)\|_{L^r} < \infty$. Le fait que $w \in C([0,T], L^r)$ se démontre exactement comme la preuve de la continuité dans l'étape 2 de la preuve du Théorème 11.1. Nous en omettons donc la preuve.

<u>Cas $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n} < 0$.</u> En utilisant le lemme 11.1 on obtient

$$\|w(t)\|_{L^\infty} \le \int_0^t \|S(t-s)\nabla.(u\nabla\Phi_u)\|_{L^\infty}ds \le \int_0^t \frac{C}{(t-s)^\gamma}\|u\|_X^2$$

avec $\gamma = \frac{n}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n} < 0$ on a $\gamma < 1$ et donc que $\sup_{0 \le t \le T}\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\gamma} < \infty$. Donc $w(t) \in L^\infty$ avec $\|w(t)\|_{L^\infty} \le C\|u\|_X^2$. La continuité de $[0,T]$ dans L^∞ se démontre en combinant les idées de la preuve de la continuité de l'étape 2 de la preuve du Théorème 11.1, et l'étape 1 de la démonstration en cours, nous la laissons en exercice.

□

3.2. Gain de régularité.

Proposition 11.3 (Gain de régularité). *Soit une solution intégrale du système de Keller-Segel dans L^p sur $[0,T]$, avec $u \in C([0,T_0], W^{k,\infty} \cap W^{k,p})$ for some $k \ge 0$, alors $u \in C((0,T_0], W^{k+1,\infty} \cap W^{k+1,p})$.*

Corollaire 11.2. *Une telle fonction u satisfait $u \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R}^n)$.*

L'idée de la preuve du corollaire est d'appliquer la proposition 11.3 itérativement. C'est à nouveau un example de bootstrap parabolique, comme celui de la sous-section précédente.

Preuve du corollaire. **Étape 1**. *Différentiabilité à tout ordre en espace.* Nous affirmons que la fonction u admet des dérivées en espace à tout ordre, et que celles-ci sont continues de $(0,T]$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En effet, en appliquant une première fois le lemme 11.3 on obtient que la fonction u et ses dérivées d'ordre $k+1$ en espace sont continues de $(0,T]$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit ensuite $t_0 \in (0,T)$. Puisque u et ses dérivées d'ordre $k+1$ en espace sont continues de $[t_0,T]$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on peut à nouveau appliquer le lemme 11.3 et l'on obtient que les dérivées jusqu'à l'ordre d'ordre $k+2$ en espace sont continues de $(t_0,T]$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme on peut choisir t_0 arbitrairement petit, les dérivées jusqu'à l'ordre d'ordre $k+2$ en espace sont continues de $(0,T]$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On itère une nouvelle fois cette argument pour obtenir la continuité des dérivées jusqu'à l'ordre $k+3$... et ainsi de suite.

Étape 2. *Différentiabilité par rapport au temps.* Dans l'identité (**??**), le premier terme $S(t)u_0(\cdot)$ est C^∞ par la Proposition 6.1. Pour le second terme, pour tout $s \in [0,T)$, la fonction $S(t-s)(u(s)^2)$ est C^∞ par rapport à $t > s$ par la même proposition. On rappelle que pour f deux fois différentiable on a $\partial_t(S(t)f) = \Delta(S(t)f) = S(t)\Delta f$. En appliquant ce résultat grâce à l'étape 1, on a que $\partial_t S(t-s)((u(s))^2) = S(t-s)(\Delta(u(s)^2))$ est une fonction bornée. L'identité (**??**) montre donc que u est différentiable par rapport au temps sur $(0,T] \times \mathbb{R}^n$.

On a en outre l'idendité

$$\begin{aligned}\partial_t u(t) &= \partial_t(S(t)u_0) + \nabla.(u.\nabla\Phi_u) + \int_0^t \partial_t\left(S(t-s)\left(\nabla.(u.\nabla\Phi_u)(s)\right)\right) ds \\ &= \Delta u(t,x) + \nabla.(u.\nabla\Phi_u)(t,x). \end{aligned} \tag{11.20}$$

Par l'étape 1, les deux fonctions Δu et u^2 admettent chacune des dérivées en espace à tout ordre, et celles-ci sont continues de $(0,T]$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc $\partial_t u$ admet des dérivées en espace à tout ordre, et celles-ci sont continues de $(0,T]$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On peut alors itérer cette procédure : le membre de droite de (11.20) est ainsi différentiable par rapport au temps, et l'on obtient $\partial_t^2 u = \Delta\partial_t u + 2u\partial_t u$. Puisque u et $\partial_t u$ admettent des dérivées en espace à tout ordre, et que celles-ci sont continues de $(0,T]$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, cette identité démontre que cela est également vrai pour $\partial_t^2 u$.

Le résultat du corollaire s'obtient en itérant à n'importe quel ordre de différentiabilité cet argument.

□

Preuve de la proposition 11.3. La preuve repose sur l'observation suivante. La démonstration du théorème 11.1 est basée sur un argument de point fixe qui démontre que la solution a les mêmes propriétés que la solution de léquation de la chaleur linéaire avec même donnée initiale. On peut en fait incorporer davantage de propriétés des solutions de l'équation de la chaleur dans les espaces dans lesquels on effectue le point fixe.

Soit Y l'espace de Banach associé à la norme

$$\|v\|_Y = \|v\|_{L^\infty([0,T_0],W^{k,\infty}\cap W^{k,p})} + \sup_{t\in(0,T_0]} \sqrt{t}\|\nabla^{k+1}v(t)\|_{L^\infty\cap L^p}.$$

Nous remarquons que la deuxième quantité encode un effet régularisant $\|\nabla^{k+1}v(t)\|_{L^p\cap L^\infty} \leq \frac{\|v\|_Y}{\sqrt{t}}$ avec le même taux de régularisation que celui du semi-groupe de la chaleur de $W^{k,\infty}\cap W^{k,p}$ vers $W^{k+1,\infty}\cap W^{k+1,p}$, voir (6.18).

Nous laissons en exercice de construire une solution dans Y par point fixe comme dans la preuve du théorème 11.1.

□

4. Solutions maximales et problème bien posé au sens d'Hadamard

Proposition 11.1 (Solution maximale). *On conserve les hypothèses du théorème 11.1. Alors il existe un unique* $T_{max} > 0$ *et une unique fonction* u *satisfaisant les conclusions du théorème 11.1 et de la proposition 11.1 sur l'intervalle* $[0, T_{max})$ *qui a la propriété suivante. Si* v *est une autre fonction satisfaisant les conclusions du théorème 11.1 sur un intervalle* $[0, T]$ *pour la même donnée initiale* u_0*, alors* $T < T_{max}$ *et* $u = v$ *presque partout sur* $[0, T] \times \mathbb{R}^n$*.*

Si $T_{max} = \infty$ la solution est définie pour tout temps $t \geq 0$, et on dit alors qu'elle est *globale*. Si $T_{max} < \infty$ on dit que la solution *explose en temps fini*, ou de manière équivalente qu'elle *devient singulière en temps fini*.

Proof. **Étape 1**. *Coïncidence des solutions.* Nous affirmons tout d'abord que si u et v sont deux fonctions satisfaisant les conclusions du théorème 11.1 sur un même intervalle $[0, \tau]$, alors $u = v$ presque partout sur $[0, \tau] \times \mathbb{R}^n$.

Pour le démontrer, on pose

$$E = \{\tilde{\tau} \in [0, \tau] \text{ tel que pour tout } t \in [0, \tilde{\tau}],\ u(t, x) = v(t, x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Alors E est non vide car $0 \in E$.

Montrons que E est fermé. En effet, supposons que $\tilde{\tau}_n$ est une suite dans E avec $\tilde{\tau}_n \to \tilde{\tau}_\infty \in [0, T]$. Soit alors $t \in [0, \tilde{\tau}_\infty]$. Si $t < \tilde{\tau}_\infty$, alors on a $t < \tilde{\tau}_n$ pour n assez grand, et donc $u(t, x) = v(t, x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ car $\tilde{\tau}_n \in E$. Si $t = \tilde{\tau}_\infty$, alors comme $u(\tilde{\tau}_n, x) \to u(\tilde{\tau}_\infty, x)$ presque partout car $u \in C([0, \tau], L^{n/2}(\mathbb{R}^n))$, et que de même $v(\tilde{\tau}_n, x) \to v(\tilde{\tau}_\infty, x)$, en passant à la limite dans l'égalité $u(\tilde{\tau}_n, x) = v(\tilde{\tau}_n, x)$ on obtient $u(\tilde{\tau}_\infty, x) = v(\tilde{\tau}_\infty, x)$. Donc $\tilde{\tau}_\infty \in E$, et E est fermé.

Montrons que E est ouvert dans $[0, \tau]$. Soit $\tilde{\tau} \in E$. Si $\tilde{\tau} = \tau$, alors par définition de E on a $E = [0, \tau]$ et donc E est bien ouvert dans $[0, \tau]$. Si $\tilde{\tau} < \tau$, alors par définition de E on a $u(\tilde{\tau}) = v(\tilde{\tau})$, ce qui s'écrit

$$u(\tilde{\tau}) = v(\tilde{\tau}) = S(\tilde{\tau})u_0 + \int_0^{\tilde{\tau}} S(\tilde{\tau} - s)\nabla.\,(u\nabla\Phi_u(s, \cdot))\,ds.$$

Pour $t' \in [0, \tau - \tilde{\tau}]$ on décompose alors

$$\begin{aligned} u(\tilde{\tau} + t') &= S(\tilde{\tau} + t')u_0 + \int_0^{\tilde{\tau}+t'} S(\tilde{\tau} + t' - s)\nabla.\,(u\nabla\Phi_u(s))\,ds \\ &= S(t')S(\tilde{\tau})u_0 + S(t')\int_0^{\tilde{\tau}} S(\tilde{\tau} - s)\nabla.\,(u\nabla\Phi_u(s))\,ds + \int_{\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}+t'} S(\tilde{\tau} + t' - s)\nabla.\,(u\nabla\Phi_u(s))\,ds \\ &= S(t')(u(\tilde{\tau})) + \int_0^{t'} S(t')\nabla.\,(u\nabla\Phi_u)\,(\tilde{\tau} + s)ds. \end{aligned} \tag{11.21}$$

Le même calcul, puisque $u(\tilde{\tau}) = v(\tilde{\tau})$, produit

$$v(\tilde{\tau} + t') = S(t')(u(\tilde{\tau})) + \int_0^{t'} S(t')\nabla.\,(v\nabla\Phi_v)\,(\tilde{\tau} + s))ds. \tag{11.22}$$

En appliquant le théorème 11.1 pour la donnée initiale $w_0 = u(\tilde{\tau})$, on a qu'il existe $T > 0$ et une unique fonction w satisfaisant les propriété du théorème 11.1 et notamment l'identité

$$w(t') = S(t')w_0 + \int_0^{t'} S(t' - s)\nabla.\,(w\nabla\Phi_w)\,(s)ds.$$

Or, les fonctions $t' \mapsto u(\tilde{\tau}+t')$ et $t' \mapsto v(\tilde{\tau}+t')$ satisfont cette même identité par (11.22) et (11.22). Donc par unicité $w(t') = v(\tilde{\tau}+t') = u(\tilde{\tau}+t')$ pour tout $t' \in [0,T]$. Donc $u(t) = v(t)$ pour tout $t \in [\tilde{\tau}, \tilde{\tau}+t']$. Comme $\tilde{\tau} \in E$ on a $u(t) = v(t)$ pour tout $t \in [0,\tilde{\tau}]$ et ainsi $u(t) = v(t)$ pour tout $t \in [0, \tilde{\tau}+T]$. Donc $[0,\tilde{\tau}+T] \subset E$, et E est ouvert.

Par connexité, puisque E est un ouvert et fermé non vide de $[0,T]$, on a $E = [0,T]$. Par définition de E on a alors $u(t,x) = v(t,x)$ presque partout sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ comme annoncé.

Étape 2. *Définition de la solution maximale.* On définit alors

$$T_{max} = \sup\Big\{T > 0 \text{ tel qu'il existe une fonction } u \text{ satisfaisant les conclusions du théorème 11.1 sur } [0,T]\Big\}.$$

Pour tout $t < T_{max}$, la fonction $u(t,\cdot)$ est bien définie, et de manière unique, de par la définition de T_{max}, et de par l'étape 1. Toujours de par la définition de T_{max} et l'étape 1, elle vérifie les propriét'es désirées de la proposition.

□

Nous rappelons que la notion de problème de Cauchy bien posé dans un espace de Banach fait l'objet de la définition 6.2. Pour un problème d'évolution non linéaire, les solutions peuvent ne pas être globales, et il convient alors d'adapter les espaces dans la définition à un intervalle de temps $[0,T]$.

PROPOSITION 11.2. *L'équation de Keller-Segel est bien posée dans L^p pour tout $\frac{n}{2} < p < n$ avec espace auxiliaire $Y = C^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)$. C'est-à-dire que pour toute fonction $u_0 \in L^p$ il existe une unique solution classique maximale $u \in C([0,T_{max}),L^p)\cap C^\infty((0,T_{max})\times\mathbb{R}^n)$. De plus, la fonction $u_0 \mapsto T_{max}(u_0)$ est continue sur L^p et pour tout $0 < T < T_{max}(u_0)$, la fonction qui à v_0 associe la solution v est continue d'un voisinage de u_0 dans $C([0,T],L^p)$.*

PROOF. La preuve combine l'ensemble des résultats précédents.
A ecrire.

□

5. Exercices

Rajouter un exercice sur l'unicite pour l'équation de Poisson

EXERCICE 11.1 (Formule de la moyenne pour l'équation de Laplace). *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Delta u = 0$.*

1. Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(r) = \frac{1}{Sur(S(0,r))}\int_{S(0,r)} u(x)dS$$

où $S(0,r)$ est la sphère centrée en zéro de rayon r, $Sur(S(0,r))$ désigne sa surface, et dS est la mesure de surface sur $S(0,r)$. Montrer que

$$\varphi(r) = \int_{S(0,1)} u(rx)dS.$$

2. Montrer que

$$\varphi'(r) = \int_{S(0,1)} \nabla u(rx).\vec{\nu}(x)dS = \frac{1}{Sur(S(0,r))}\int_{S(0,r)} \nabla u(x).\vec{\nu}(x)dS$$

où $\vec{\nu} = \frac{x}{|x|}$.

3. Montrer en utilisant la question précédente et le théorème de la divergence (lemme 11.2) que $\varphi'(r) = 0$ *pour tout* $r > 0$.

4. Montrer que $\varphi(r) \to u(0)$ *lorsque* $r \to 0$. *Déduire de cela et de la question 3. que pour tout* $r > 0$,

$$u(0) = \frac{1}{Sur(S(0,r))} \int_{S(0,r)} u(x) dS.$$

5. Déduire de la question 5. la formule de la moyenne pour une fonction harmonique :

$$u(y) = \frac{1}{Sur(S(y,r))} \int_{S(y,r)} u(x) dS.$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 11.2. *1. Montrer que si* (u, Φ_u) *est une solution de l'équation de Keller-Segel* (11.1), *alors pour tout* $\lambda > 0$,

$$(u_\lambda, \Phi_{u_\lambda}) = \left(\frac{1}{\lambda^2} u(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}) \ , \ \Phi_u(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}) \right)$$

est aussi une solution de l'équation de (11.1), *de donnée initiale* $u_{0,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda^2} u_0(\frac{x}{\lambda})$.

2. On rappelle que le concept de solution maximale est défini dans la proposition 11.1. On suppose que pour une donnée initiale $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *la solution maximale* u, *définie sur* $[0, T_{max})$ *explose en temps fini* $T_{max} < \infty$. *Montrer que* $(u_\lambda, \Phi_{u_\lambda})$ *explose en temps fini* $T_{max,\lambda} = \lambda^2 T_{max}$.

3. Montrer que si $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *alors* $u_{0,\lambda} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\|u_{0,\lambda}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{\frac{n}{p}-2} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

4. Soit $1 \leq p < \frac{n}{2}$. *On suppose qu'il existe une solution* u *de donnée initiale* u_0 *avec* $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *qui explose en temps fini* $T_{max} < \infty$. *Déduire des questions 2. et 3. que pour tout* $\delta > 0$, *il existe une solution* v *de donnée initiale* v_0 *avec* $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *qui satisfait* $\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \delta$ *et qui explose en temps* $T_{max}(v_0) \leq \delta$.

5. On garde les mêmes hypothèses. Déduire que la fonction qui à une donnée initiale associe le temps maximal d'existence $u_0 \mapsto T_{max}(u_0)$ *n'est pas une fonction continue sur* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Remarque : La question 3. montre que $L^{\frac{n}{2}}$ est un espace critique pour l'équation. La question 5. montre que dans un espace sous-critique L^p avec $p < \frac{n}{2}$, il existe des données initiales arbitrairement petites, mais dont la solution explose en des temps arbitrairement court ! C'est l'exemple typique de phénomène à avoir en tête qui est responsable du fait qu'en général, les équations ne sont pas bien posées dans les espaces sous-critiques.

Exercice 11.3. *Finir la preuve de la proposition 11.3 en tenant compte des indications mentionnées dans l'esquisse de cette preuve après l'énoncé de la proposition.*

Exercice 11.4 (Existence de solution intégrale dans l'espace de Lebesgue critique). *On considère l'équation de la chaleur quadratique sur* $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^2, & t > 0 \ et \ x \in \mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{11.23}$$

On va démontrer l'existence de solutions intégrales dans l'espace critique $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$.

On rappelle que l'espace $L^\infty([0,T], L^q(\mathbb{R}^3))$ *est défini dans l'exercice 6.3 où il est démontré que c'est un espace de Banach. Soit* $2 < q < 3$. *On pose* $\alpha = 1 - \frac{3}{2q}$ *et pour* $T > 0$ *on définit* $X_T = L^\infty([0,T], L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))$ *de norme* $\|f\|_{X_T} = \|f\|_{L^\infty([0,T], L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))}$ *et* $Y_T = \left\{f \text{ mesurable sur } [0,T] \times \mathbb{R}^3 \text{ telle que } t^\alpha f \in L^\infty([0,T], L^q(\mathbb{R}^3))\right\}$ *de norme*

$$\|f\|_{Y_T} = \|t^\alpha f\|_{L^\infty([0,T], L^q(\mathbb{R}^3))}.$$

Enfin, on pose pour $R_1, R_2 > 0$,

$$B_T(R_1, R_2) = \{f \in X_T \cap Y_T \text{ telle que } \|f\|_{X_T} \leq R_1 \text{ et } \|f\|_{Y_T} \leq R_2\}.$$

Définition : *On dit que u est une solution intégrale dans* $L^{\frac{3}{2}}$ *de* (11.23) *sur* $[0,T]$ *si* $u \in X_T \cap Y_T$, *et que pour presque tout* $t \in [0,T]$ *on a* $S(t-\cdot)(u^2(\cdot)) \in L^1([0,t], L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1([0,t], L^q(\mathbb{R}^3))$ *et*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)(u^2(s))ds.$$

(Noter que cette définition n'est pas exactement la même que celle pour les solutions intégrales de Keller-Segel car on ne demande pas la continuité).

(1) *Montrer que pour tous* $u, v \in Y_T$ *et* $r > \frac{q}{2}$ *on a pour tous* $s \in [0,T]$ *et* $t > s$ *que* $S(t-s)(u(s)v(s)) \in L^r(\mathbb{R}^3)$ *avec*

$$\|S(t-s)(u(s)v(s))\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{q} - \frac{3}{2r}} s^{2\alpha}} \|u\|_{Y_T} \|v\|_{Y_T}.$$

(2) *Montrer que pour tout* $\theta_1, \theta_2 < 1$, *l'intégrale*

$$I_{\theta_1,\theta_2} = \int_0^1 \frac{1}{(1-s)^{\theta_1}} \frac{1}{s^{\theta_2}} ds < \infty$$

est bien finie, et que pour tout $t > 0$,

$$\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\theta_1} s^{\theta_2}} ds = t^{1-\theta_1-\theta_2} I_{\theta_1,\theta_2}.$$

(3) *On pose définit l'application* $\Phi : v(t,x) \mapsto \Phi(v)(t,x)$ *par*

$$\Phi(v)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)(v^2(s))ds.$$

Montrer en vous aidant de l'exercice 6.3 que pour tout $\delta > 0$, *il existe* $T > 0$ *qui dépend de* u_0 *tel que pour tout* $v \in Y_T$, *on a* $\Phi(v) \in X_T \cap Y_T$ *avec*

$$\|\Phi(v)\|_{X_T} \leq \|u_0\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} + I_{1-2\alpha,2\alpha} \|v\|_{Y_T}^2 \qquad \text{et} \qquad \|\Phi(v)\|_{Y_T} \leq \delta + I_{1-\alpha,2\alpha} \|v\|_{Y_T}^2$$

(4) *Montrer qu'il existe* $T > 0$ *et* $\delta > 0$ *qui dépendent de* u_0 *tel que* Φ *est une contraction sur* $Z_T(2\|u_0\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)}, \delta)$.

(5) *Montrer le résultat suivant :*

Résultat *: Pour tout* $u_0 \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$, *il existe* $T > 0$ *et une solution intégrale* u *dans* $L^{\frac{3}{2}}$ *de* (11.23) *sur* $[0,T]$.

CHAPTER 12

Stabilité de la solution auto-similaire fondamentale I : renormalisation et modulation

1. Existence d'une solution auto-similaire singulière

Le temps maximal d'existence d'une solution peut être fini. Nous allons donner l'exemple d'une telle solution qui est auto-similaire et donnée par une formule explicite. L'obtention de la formule explicite repose sur le fait que l'équation se simplifie dans le cas de solutions à symétrie radiale.

1.1. Réduction à une équation locale pour les solutions radiales. On suppose dans cette sous-section que u est une solution à symétrie radiale. Par abus de notation, on écrira $u(t,x) = u(t,r)$ où $|x| = r$. Alors l'équation de Keller-Segel se simplifie à l'aide du changement d'inconnue suivant. On définit la masse partielle de u par

$$\begin{aligned} m(t,r) &= \frac{1}{r^n|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|x|\leq r} u(t,x)dx \\ &= \frac{1}{r^n}\int_0^r u(t,r')r'^{n-1}dr', \end{aligned}$$

où $\mathbb{S}^{n-1}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $|\mathbb{S}^{n-1}|$ sa surface. Cette quantité est égale à la moyenne de u sur la boule de rayon r centrée à l'origine, à un facteur constant près.

Lemme 12.1. *Soit u une fonction suffisamment régulière et décroissante. Alors u est une solution du système de Keller-Segel* (11.1) *si et seulement si m est une solution de l'équation*

$$\partial_t m = \partial_{rr} m + \frac{n+1}{r}\partial_r m + nm^2 + rm\partial_r m. \tag{12.1}$$

Proof. La preuve repose sur des calculs explicites. On calcule en utilisant l'équation (11.1) puis le théorème de la divergence 11.2

$$\begin{aligned} \partial_t m(r) &= \frac{1}{r^n|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|x|\leq r}\partial_t u(t,x)dx \\ &= \frac{1}{r^n|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|x|\leq r}(\Delta u(t,x) - \nabla.(u\nabla\Phi_u)dx \\ &= \frac{1}{r^n|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|x|=r}\nabla u(t,x).\frac{x}{|x|}dS - \frac{1}{r^n|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|x|=r}u(t,x)\nabla\Phi_u(t,x).\frac{x}{|x|}dS \end{aligned}$$

où dS est la mesure de surface sur la sphère $\{|x| = r\}$. De manière similaire, en utilisant successivement la définition de m, puis $-\Delta\Phi_u = u$ et le théorème de la divergence

$$\begin{aligned} m(r) &= \frac{1}{r^n|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|x|\leq r} u(x)dx \\ &= -\frac{1}{r^n|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|x|\leq r} \Delta\Phi_u dx \\ &= -\frac{1}{r^n|\mathbb{S}^{n-1}|}\int_{|x|=r} \nabla\Phi_u.\frac{x}{|x|}dS \end{aligned}$$

Puisque u est radiale, on a que Φ_u est aussi radiale, et donc $\nabla u = \frac{x}{|x|}\partial_r u$ et $\nabla\Phi_u = \frac{x}{|x|}\partial_r\Phi_u$. Les deux expressions ci-dessus se simplifient alors en

$$\partial_t m(r) = \frac{1}{r}\partial_r u(r) - \frac{1}{r}u(r)\partial_r\Phi_u(r),$$

et

$$m = -\frac{1}{r}\partial_r\Phi_u.$$

En combinant,

$$\partial_t m(r) = \frac{1}{r}\partial_r u(r) + mu.$$

En différentiant l'expression de la masse partielle on trouve

$$\partial_r m = -\frac{n}{r^{n+1}}\int_0^r u(r')r'^{n-1}dr' + \frac{u(r)}{r} = -\frac{nm(r)}{r} + \frac{u(r)}{r}.$$

Donc

$$\frac{u}{r} = \partial_r m + \frac{nm}{r}$$

et

$$\frac{\partial_r u}{r} = \partial_{rr}m + \frac{(n+1)}{r}\partial_r m.$$

On a alors

$$\partial_t m = \partial_{rr}m + \frac{(n+1)}{r}\partial_r m + nm^2 + rm\partial_r m,$$

ce qui clôt la démonstration.

□

1.2. Existence d'une solution auto-similaire explosive. Le système de Keller-Segel, malgré son apparente complexité, admet une solution explosive explicite d'une forme simple. Celle-ci est auto-similaire, tout comme les solutions singulières de l'équation de Burgers étudiées dans la section 3.

Lemme 12.2 (Profil auto-similaire fondamental de Keller-Segel). *En toute dimension $n \geq 3$, la fonction*

$$\Psi(y) = \frac{4(n-2)(2n+|x|^2)}{(2(2n-2)+|x|^2)^2}$$

est telle que pour tout $T \in \mathbb{R}$ la fonction

$$u(t,x) = \frac{1}{T-t}\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right) \tag{12.2}$$

est une solution de l'équation de Keller-Segel (11.1)*. La masse partielle du profil, $\varphi(\rho) = |\mathbb{S}^{d-1}|^{-1}\int_{|y|\leq\rho}\Psi(y)dy$ est*

$$\varphi(\rho) = \frac{4}{2(n-2)+\rho^2}. \tag{12.3}$$

Elle satisfait l'équation auto-similaire stationnaire

$$2\varphi + \rho\partial_\rho\varphi = \partial_{\rho\rho}\varphi + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho\varphi + n\varphi^2 + \rho\varphi\partial_\rho\varphi. \tag{12.4}$$

PROOF. On rappelle que u est une solution de (11.1) si et seulement sa masse partielle m est une solution de (12.1). Par un changement de variable, la masse partielle m d'une fonction u de la forme (12.2) s'écrit

$$m(t,r) = \frac{1}{T-t}\varphi(\frac{r}{\sqrt{T-t}}).$$

On calcule alors

$$\partial_t m(t,r) = -\frac{1}{(T-t)^2}\varphi(\frac{r}{\sqrt{T-t}}) - \frac{r}{2(T-t)^{3/2}}\partial_\rho\varphi(\frac{r}{\sqrt{T-t}}),$$
$$\partial_{rr}m(t,r) + \frac{n+1}{r}\partial_r m(t,r) = \frac{1}{(T-t)^2}(\partial_{\rho\rho}\varphi + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho\varphi)(\frac{r}{\sqrt{T-t}}),$$
$$(m(t,r))^2 + rm(t,r)\partial_r m(t,r) = \frac{1}{T-t}\varphi^2(\frac{r}{\sqrt{T-t}}) + \frac{r}{(T-t)^{3/2}}\varphi(\frac{r}{T-t})\partial_\rho\varphi(\frac{r}{\sqrt{T-t}}).$$

En injectant ces trois identités dans (11.1), on constate que u de la forme (12.2) est une solution de (11.1) si et seulement φ est une solution de (12.4). Cette dernière équation se réécrit

$$\partial_{\rho\rho}\varphi + \left(\frac{n+1}{\rho} - \frac{\rho}{2} + \rho\varphi\right)\partial_\rho\varphi + (n\varphi - 1)\varphi = 0.$$

On la vérifie alors par un calcul explicite. En effet,

$$\begin{aligned}
\partial_\rho\varphi &= -\frac{8\rho}{(2(n-2)+\rho^2)^2},\\
\partial_{\rho\rho}\varphi &= \frac{24\rho^2 - 16(n-2)}{(2(n-2)+\rho^2)^3},\\
\frac{n+1}{\rho} - \frac{\rho}{2} + \rho\varphi &= \frac{4(n+1)(n-2) + 14\rho^2 - \rho^4}{2\rho(2(n-2)+\rho^2)},\\
(n\varphi - 1)\varphi &= \frac{16(n+2)(n-2) + 32\rho^2 - 4\rho^4}{(2(n-2)+\rho^2)^2},
\end{aligned}$$

ce qui permet d'établir le résultat.

□

2. Renormalisation des solutions perturbatives

Dans cette section et la suivante, nous allons étudier la stabilité de la solution auto-similaire fondamentale Ψ du système de Keller-Segel, introduite dans le lemme 12.2. C'est-à-dire, nous allons étudier des solutions de la donnée initiale s'écrit

$$u_0 = \Psi + \tilde{u}_0,$$

où $\tilde{u}_0$ représente une perturbation, que l'on choisira petite dans un sens adéquat donné plus tard. Dans cette section, nous faisons une analyse *a priori* de la solution : nous allons supposer des hypothèses additionnelles sur la solution, et en déduire des conséquences. Ces hypothèses additionnelles seront justifiées plus tard.

2.1. Renormalisation de l'équation. En supposant (cette hypothèse sera justifiée rigoureusement plus tard) que la solution u de (11.1) est proche du profile auto-similaire Ψ concentrée spatialement à échelle $\lambda(t)$, on décompose

$$u(t,x)=\frac{1}{\lambda(t)^2}(\Psi+w(t,\cdot))\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{12.5}$$

où la fonction w s'obtient par la formule $w(t,y)=\lambda(t)^2u(t,\lambda(t)y)-\Psi(y)$. On introduit alors le changement de variable suivant qui permet de zoomer à l'échelle $x\approx\lambda(t)$ et d'adapter le temps en conséquence

$$y=\frac{x}{\lambda(t)},\qquad s(t)=\int_0^t\frac{1}{\lambda(t)^2}dt.$$

Ce nouveau temps est spécialement choisi pour que

$$\frac{d}{dt}s=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{12.6}$$

Ces variables sont les *variables auto-similaires* et l'échelle λ est appelée *paramètre de modulation*. On écrira $t(s)$ pour l'inverse de la fonction s, i.e. $s(t(s))=s$. Puisqu'il existe une bijection entre les temps t et les temps s, on abusera de notation et l'on confondra les fonctions de la variable t et celles de la variable s. Par exemple, λ sera considérée à la fois comme une fonction de t et aussi comme une fonction de s par $\lambda(s)=\lambda(t(s))$.

On notera par q la masse partielle de w:

$$q(s,\rho)=\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{|y|\le\rho}w(s,y)dy,\qquad \rho=\frac{r}{\lambda(t)}.$$

La décomposition (12.5) se réécrit alors

$$m(t,r)=\frac{1}{\lambda(t)^2}(\varphi+q(t,\cdot))\left(\frac{r}{\lambda}\right). \tag{12.7}$$

Lemme 12.1 (Equation renormalisée et linéarisée). *Soit u une solution C^∞ de l'équation de Keller-Segel* (11.1) *sur* $[0,T]$, *et* $\lambda\in C^1([0,T],(0,\infty))$. *Alors q est une solution C^∞ de*

$$\partial_s q+\mathcal{L}q=\mathcal{M}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda},q\right)+\mathcal{N}(q) \tag{12.8}$$

sur $[0,s(T)]$, *où, en notant* $\lambda_s=\frac{d}{ds}\lambda$,

$$\mathcal{L}q=-\partial_{\rho\rho}q-\frac{n+1}{\rho}\partial_\rho q+(\frac{\rho}{2}-\rho\varphi)\partial_\rho q+(1-\rho\partial_\rho\varphi-2n\varphi)q \tag{12.9}$$

$$\mathcal{M}=(\frac{\lambda_s}{\lambda}+\frac{1}{2})(2(\varphi+q)+\rho\partial_\rho(\varphi+q)) \tag{12.10}$$

$$\mathcal{N}=nq^2+\rho q\partial_\rho q \tag{12.11}$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est l'opérateur linéarisé dans les variables auto-similaires, $\mathcal{M}$ est appelé le terme de modulation, et $\mathcal{N}$ le terme non linéaire.

Proof. La preuve s'effectue par des calculs explicites. Par (12.7) on a en différentiant des produits et compositions de fonctions

$$\partial_t m=-\frac{2\lambda_t}{\lambda^3}(\varphi+q)(\frac{r}{\lambda})+\frac{1}{\lambda^2}\partial_s q(\frac{r}{\lambda})-\frac{\lambda_t}{\lambda^3}\frac{r}{\lambda}(\partial_\rho\varphi+\partial_\rho m)(\frac{r}{\lambda}).$$

Comme $\frac{d}{dt}\lambda=\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\lambda=\frac{1}{\lambda^2}\lambda_s$ et $\partial_t q=\frac{ds}{dt}\partial_s q=\frac{1}{\lambda^2}\partial_s q$ par (12.6) cela donne

$$\partial_s m(t,r)=-\frac{2\lambda_s}{\lambda^5}(\varphi+q(s,\cdot))(\rho)+\frac{1}{\lambda^4}\partial_s q(s,\rho)-\frac{\lambda_s}{\lambda^5}\rho(\partial_\rho\varphi+\partial_\rho q(s,\cdot))(\rho)$$

où on a utilisé $\frac{x}{\lambda} = y$. De manière similaire,

$$\partial_{rr} m(t,r) + \frac{n+1}{\rho}\partial_r m(t,r) = \frac{1}{\lambda^4}\left((\partial_{\rho\rho} + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho)\varphi + (\partial_{\rho\rho} + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho)q(s,\cdot)\right)(\rho)$$

et

$$nm^2(t,r) + rm(t,r)\partial_r m(t,r) = \frac{1}{\lambda^4}n\left((\varphi + q(s,\cdot))^2 + \rho(\varphi + q(s,\cdot))(\partial_\rho\varphi + \partial_\rho q(s,\cdot))\right)(\rho)\,.$$

En combinant les trois identités ci-dessus, l'équation $m_t = \partial_{rr}m + \frac{n+1}{r}\partial_r m + nm^2 + rm\partial_r m$ se ré'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned}\partial_s q = {} & \frac{2\lambda_s}{\lambda}(\varphi + q) + \frac{\lambda_s}{\lambda}\rho(\partial_\rho\varphi + \partial_\rho q) \\ & + (\partial_{\rho\rho} + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho)\varphi + (\partial_{\rho\rho} + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho)q + n(\varphi+q)^2 + \rho(\varphi+q)(\partial_\rho\varphi + \partial_\rho q).\end{aligned} \tag{12.12}$$

On rappelle alors que φ est solution de $2\varphi + \rho\partial_\rho\varphi = \partial_{\rho\rho}\varphi + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho\varphi + n\varphi^2 + \rho\varphi\partial_\rho\varphi$ par (12.4). Donc le deuxième terme du membre de droite de (12.12) est

$$\begin{aligned}& (\partial_{\rho\rho} + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho)\varphi + (\partial_{\rho\rho} + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho)q + n(\varphi+q)^2 + \rho(\varphi+q)(\partial_\rho\varphi + \partial_\rho q) \\ & = 2\varphi + \rho\partial_\rho\varphi + \underbrace{(\partial_{\rho\rho} + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho)q + \rho\varphi\partial_\rho q + 2n\varphi q + \rho\partial_\rho\varphi q}_{=-\mathcal{L}q + 2q + \rho\partial_\rho q} + \underbrace{nq^2 + \rho q\partial_\rho q}_{=\mathcal{N}} \\ & = 2(\varphi+q) + \rho\partial_\rho(\varphi+q) - \mathcal{L}q + \mathcal{N}.\end{aligned}$$

En injectant cette identité dans (12.12), on obtient alors (12.8).

□

2.2. Décomposition orthogonale sur l'ensemble des profils auto-similaires. Le lemme de renormalisation 12.1 est valide pour n'importe quelle fonction λ de classe C^1 en temps. Nous allons maintenant voir qu'il existe un unique choix pour λ tel que la décomposition (12.7) soit une décomposition orthogonale. Parmi les multiples décompositions orthogonales auxquelles on pourrait penser, il en existe une plus naturelle que les autres.

On introduit la fonction de poids

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\varphi^2(\rho)}e^{-\frac{\rho^2}{4}} \tag{12.13}$$

Le lemme suivant montre que l'espace L^2_σ associé au produit scalaire

$$\langle q_1, q_2\rangle_{L^2_\sigma} = \int_0^\infty q_1(\rho)q_2(\rho)\sigma(\rho)\rho^{n+2}d\rho$$

et donc à la norme

$$\|m\|_{L^2_\sigma} = \sqrt{\int_0^\infty |m(\rho)|^2\sigma(\rho)\rho^{n+2}d\rho}$$

fournit un cadre fonctionnel hilbertien adapté à l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$. Il montre également que l'espace tangent à l'ensemble des profils auto-similaire, associé aux fonctions

$$\partial_\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}\varphi(\frac{r}{\lambda})\right) = \frac{1}{\lambda^2}(2\varphi + \rho\partial_\rho\varphi)(\frac{r}{\lambda})$$

correspond à une fonction propre de $\mathcal{L}$.

Lemme 12.2 (Symétrie de l'opérateur et fonctions propres engendrées par les symétries). *L'opérateur $\mathcal{L}$ est symétrique pour le produit scalaire de L^2_σ, pour des fonctions $q, q' \in C^\infty$ bornées et dont les dérivées sont bornées :*

$$\langle \mathcal{L}q_1, q_2\rangle_{L^2_\sigma} = \langle q_1, \mathcal{L}q_2\rangle_{L^2_\sigma}. \tag{12.14}$$

De plus, -1 est une valeur propre, et la fonction propre associée est engendrée par le groupe de redimensionnement :

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial_\lambda}\left(\lambda^2\varphi(\lambda\cdot)\right)_{|\lambda=1} = 2\varphi + \rho\partial_\rho\varphi, \tag{12.15}$$

i.e.

$$\mathcal{L}f_1 = -f_1. \tag{12.16}$$

Proof. Preuve de (12.14). Nous montrons d'abord que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}q = -\frac{1}{\rho^{n+1}\sigma}\partial_\rho\left(\rho^{n+1}\sigma\partial_\rho q\right) + q - (2\varphi + \rho\partial_\rho\varphi)q, \tag{12.17}$$

ce que l'on appelle écrire $\mathcal{L}$ sous une forme de divergence. En effet, puisque

$$\frac{1}{\rho^{n+1}\sigma}\partial_\rho\left(\rho^{n+1}\sigma\partial_\rho q\right) = \partial_{\rho\rho}q + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho q - \frac{\partial_\rho\sigma}{\sigma}\partial_\rho q,$$

que

$$\frac{\partial_\rho\sigma}{\sigma} = \frac{\partial_\rho(\varphi^{-2}e^{-\rho^2/4})}{\varphi^{-2}e^{-\rho^2/4}} = -2\frac{\partial_\rho\varphi}{\varphi} - \frac{\rho}{2}$$

et

$$\frac{\partial_\rho\varphi}{\varphi} = (2(n-2)+\rho^2)\partial_\rho\left(\frac{1}{2(n-2)+\rho^2}\right) = -\frac{2\rho}{2(n-2)+\rho^2} = -\frac{\rho}{2}\varphi$$

on déduit que

$$\frac{1}{\rho^{n+1}\sigma}\partial_\rho\left(\rho^{n+1}\sigma\partial_\rho q\right) = \partial_{\rho\rho}q + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho q + \frac{\rho}{2}\partial_\rho q - \rho\varphi\partial_\rho q.$$

Cela démontre (12.17). On en déduit ensuite (12.14) en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}q_1, q_2\rangle_{L^2_\sigma} &= -\int_0^\infty \partial_\rho\left(\rho^{n+1}\sigma\partial_\rho q_1\right)q_2 + \int_0^\infty \left(q_1 - (2\varphi + \rho\partial_\rho\varphi q_1)\right)q_2\\ &= \int_0^\infty \rho^{n+1}\sigma\partial_\rho q_1\partial_\rho q_2 + \int_0^\infty \left(1-(2\varphi+\rho\partial_\rho\varphi)\right)q_1q_2,\end{aligned}$$

et donc $\langle \mathcal{L}q_1, q_2\rangle_{L^2_\sigma} = \langle q_1, \mathcal{L}q_2\rangle_{L^2_\sigma}$.

Preuve de (12.16). Considérons la fonction auto-similaire $M(t,r) = \frac{1}{-t}\varphi(\frac{r}{\sqrt{-t}})$, définie pour $t \in (-\infty, 0)$. Celle-ci est invariante par le groupe de redimensionnement : $\lambda^2 M(\lambda^2 t, \lambda r) = M(t,r)$. En différentiant on obtient $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda^2 M(\lambda^2 t, \lambda r)) = 0$, ce qui s'écrit pour $\lambda = 1$

$$\Lambda M = 0, \qquad \Lambda = 2 + 2t\partial_t + r\partial_r, \tag{12.18}$$

où l'opérateur Λ est le génerateur infinitésimal de ce groupe. Le générateur infinitésimal du groupe de translation temporelle est ∂_t, et on a la relation de commutation

$$\begin{aligned}[\partial_t, \Lambda]u &= \partial_t(2u + 2t\partial_t u + r\partial_r u) - (2 + 2t\partial_t + r\partial_r)(\partial_t u)\\ &= 2\partial_t u.\end{aligned} \tag{12.19}$$

En combinant (12.18) et (12.19) on obtient une première identité

$$\Lambda\partial_t M = -2\partial_t M. \tag{12.20}$$

Définissons maintenant $M_{t_0}(t,r) = M(t+t_0,r)$. Comme M est une solution de (12.1) et que cette équation est invariante par translation temporelle, M_{t_0} est encore une solution de (12.1) :

$$\partial_t(M_{t_0}) = \partial_{rr}M_{t_0} + \frac{n+1}{r}\partial_r M_{t_0} + nM_{t_0}^2 + rM_{t_0}\partial_r M_{t_0}.$$

En différentiant par rapport à t_0 on trouve

$$\begin{aligned}\partial_t(\partial_{t_0}M_{t_0}) &= \partial_{rr}\partial_{t_0}M_{t_0} + \frac{n+1}{r}\partial_r\partial_{t_0}M_{t_0} + 2nM_{t_0}\partial_{t_0}M_{t_0} + r\partial_{t_0}M_{t_0}\partial_r M_{t_0} + rM_{t_0}\partial_r\partial_{t_0}M_{t_0}\\ &= \left(\partial_{rr} + \frac{n+1}{r}\partial_r + 2nM_{t_0} + r\partial_r M_{t_0} + rM_{t_0}\partial_r\right)\partial_{t_0}M_{t_0}\end{aligned}$$

Puisque $\partial_{t_0}M_{t_0}(t,r) = \partial_t M(t+t_0,r)$, en prenant $t_0 = 0$ on obtient :

$$\partial_t\partial_t M = \left(\partial_{rr} + \frac{n+1}{r}\partial_r + 2nM + r\partial_r M + rM\partial_r\right)\partial_t M.$$

Comme $\Lambda = 2t\partial_t + 2 + r\partial_r$ on obtient une seconde identité :

$$\Lambda\partial_t M = 2\left(t(\partial_{rr} + \frac{n+1}{r}\partial_r + 2nM + r\partial_r M + rM\partial_r) + 1 + \frac{r}{2}\partial_r\right)\partial_t M \tag{12.21}$$

En combinant les deux identités (12.20) et (12.21) on a

$$\left(t(\partial_{rr} + \frac{n+1}{r}\partial_r + 2nM + r\partial_r M + rM\partial_r) + 1 + \frac{r}{2}\partial_r\right)\partial_t M = -\partial_t M.$$

En prenant $t=-1$, en utilisant que $\partial_t M = \frac{1}{t}(M + \frac{r}{2}\partial_r M)$ et $M(-1,r) = \varphi(r)$, on obtient (12.16).

□

Definition 12.1. *Soit $\delta > 0$. On dit qu'une solution est piégée autour de l'ensemble de profils auto-similaires si sur $[0,T)$ si pour tout $t \in [0,T)$ il existe $\mu > 0$ tel que*

$$\left\| u(t,\cdot) - \frac{1}{\mu^2}\Psi(\frac{\cdot}{\mu})\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{\mu^2}. \tag{12.22}$$

Remark 12.1. Puisque la fonction $\frac{1}{\mu^2}\Psi(\frac{\cdot}{\mu})$ est de taille $\frac{1}{\mu^2}$ dans L^∞, l'inégalité (12.22) doit être interprété comme une petitesse de la différence $u(t,\cdot) - \frac{1}{\mu^2}\Psi(\frac{\cdot}{\mu})$ relativement à la fonction $\frac{1}{\mu^2}\Psi(\frac{\cdot}{\mu})$.

Proposition 12.1 (Decomposition orthogonale autour de l'ensemble des profils). *Il existe $C > 0$ tel que pour δ assez petit, toute fonction u appartenant à l'ensemble*

$$\left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel qu'il existe } \mu > 0 \text{ avec } \left\| u(\cdot) - \frac{1}{\mu^2}\Psi(\frac{\cdot}{\mu})\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{\mu^2}\right\}$$

peut s'écrire sous la forme $u(x) = \frac{1}{\lambda^2}(\Psi + w)(\frac{x}{\lambda})$ avec

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\delta,$$

et la masse partielle q de w satisfaisant la condition d'orthogonalité

$$\langle q, f_1\rangle_{L^2_\sigma} = 0.$$

De plus, la fonction $u \mapsto C^1$ est C^∞ de cet ensemble (muni de la topologie induite de L^∞) vers $(0,\infty)$.

Pour démontrer cette proposition, nous commençons par établir le résultat pour des échelles proches de l'unité.

LEMME 12.3 (decomposition orthogonale près du profil). *Il existe $C > 0$ tel que pour δ assez petit, toute fonction u appartenant à l'ensemble*

$$\left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \|u - \Psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \delta \right\}$$

peut s'écrire sous la forme $u(x) = \frac{1}{\lambda^2}(\Psi + w)(\frac{x}{\lambda})$ avec

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\delta,$$

et la masse partielle q de w satisfaisant la condition d'orthogonalité

$$\langle q, f_1 \rangle_{L^2_\sigma} = 0.$$

De plus, la fonction $u \mapsto C^1$ est C^∞ de cet ensemble vers $(0, \infty)$.

PROOF. Soit m la masse partielle d'une fonction u, et posons pour $\nu > 0$ la fonction $q(\rho) = \nu^2 m(\nu\rho) - \varphi(\rho)$. Considérons alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \Theta : & L^\infty(\mathbb{R}^n) \times (0, \infty) & \to & \mathbb{R} \\ & (u, \nu) & \mapsto & \langle q, f_1 \rangle_{L^2_\sigma}. \end{array}$$

Alors en changeant de variable $r = \mu\rho$, on a explicitement

$$\Theta(u, \mu) = \nu^{-n} \int_0^\infty m(r) f_1(\frac{r}{\nu}) \sigma(\frac{r}{\nu}) r^{n+1} dr - \int_0^\infty \varphi(\rho) f_1(\rho) \sigma(\rho) \rho^{n+1} d\rho.$$

Puisque σ et f_1 sont des fonctions C^∞, on peut ainsi vérifier que l'expression ci-dessus définit une fonction Θ de régularité C^∞ par rapport à (u, ν) pour la topologie produit sur $L^\infty \times (0, \infty)$.

De plus, on calcule que pour $u = \varphi$ que

$$\Theta(\varphi, \nu) = \langle \nu^2 \varphi(\nu\rho) - \varphi(\rho), f_1 \rangle_{L^2_\sigma}.$$

Ainsi, pour $\nu = 1$ on a

$$\Theta(\varphi, 1) = 0.$$

Également, en différentiant par rapport à ν on trouve

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Theta(\varphi, \nu) = \langle 2\nu\varphi(\nu\rho) + \nu^2 \rho \partial_\rho \varphi(\nu\rho), f_1 \rangle_{L^2_\sigma}.$$

En remarquant que pour $\nu = 1$ on a $2\nu\varphi(\nu\rho) + \nu^2\rho\partial_\rho\varphi(\nu\rho) = f_1(\rho)$ il vient

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Theta(\varphi, 1) = \langle f_1, f_1 \rangle_{L^2_\sigma} = \|f_1\|^2_{L^2_\sigma} > 0.$$

On peut ainsi appliquer le théorème des fonctions implicites (valables dans le cadre des espaces de Banach): il existe une unique fonction $\lambda : u \mapsto \lambda(u)$ définie pour u assez proche de φ dans L^∞, de classe C^∞, telle que

$$\Theta(u, \lambda(u)) = 0.$$

Par définition de Θ, cela signifie que $\langle q, f_1 \rangle = 0$, et donc λ satisfait les conclusions souhaitées du théorème.

□

PREUVE DE LA PROPOSITION 12.1. Celle-ci s'obtient à l'aide du lemme précédent et d'un argument de changement d'échelle.

A continuer d'ecrire.

□

2.3. Décomposition orthogonale dynamique des solutions. La proposition 12.1 implique le résultat suivant pour des solutions piégées au sens de la définition 12.1.

Proposition 12.2 (Decomposition orthogonale dynamique de la solution). *Il existe $C > 0$ tel que pour δ assez petit, si la solution u est piégée sur $[0, T)$ près de l'ensemble des profils auto-similaires alors il existe une unique fonction $\lambda \in C^1([0, T), (0, \infty))$ telle que m s'écrit*

$$m(t, r) = \frac{1}{\lambda(t)^2} \left(\varphi + q(s, \cdot)\right) \left(\frac{r}{\lambda(t)}\right)$$

avec q satisfaisant

$$\|q(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\delta \tag{12.23}$$

et la condition d'orthogonalité pour tout $0 \leq t < T$

$$\langle q(t, \cdot), f_1 \rangle_{L^2_\sigma} = 0. \tag{12.24}$$

Proof. La fonction désirée est $\lambda(u(t))$, donnée par l'application de la proposition 12.1. Les propriétés de régularité et d'unicité sont des conséquences directes de cette proposition, et du fait que la solution u est supposée C^∞, et bornée ainsi que toutes ses dérivées.

$\square$

Lemme 12.4 (Équation de modulation). *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 12.2, et en appliquant la renormalisation du lemme 12.1, on a*

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} = -\frac{1}{2} - \frac{\langle \mathcal{N}(q), f_1 \rangle_{L^2_\sigma}}{\|f_1\|^2_{L^2_\sigma} + \langle 2q + \rho\partial_\rho q, f_1 \rangle_{L^2_\sigma}} \tag{12.25}$$

Remark 12.2. En l'absence de perturbation $q = 0$, l'équation de modulation (12.25) devient $\lambda_s = -\lambda/2$ et cela correspond à une explosion en temps $T > 0$ avec $\lambda(t) = \sqrt{T - t}$.

En effet, en intégrant, il vient $\lambda(s) = \lambda(0)e^{-s/2}$. Puisque $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda^2}$ on a $\frac{dt}{ds} = \lambda^2 = \lambda(0)^2 e^{-s}$, de solution $t(s) = \lambda(0)^2(1 - e^{-s})$. En posant $T = \lambda(0)^2$ on a alors $e^{-s} = \frac{T-t}{\lambda(0)^2}$ et $\lambda = \sqrt{T - t}$ comme annoncé.

Proof. En différenciant la condition d'orthogonalité (12.24) par rapport au temps renormalisé on obtient :

$$\langle \partial_s q, f_1 \rangle_{L^2_\sigma} = 0.$$

Puisque q satisfait l'équation renormalisée (12.8), cela signifie

$$\langle \mathcal{L}q, f_1 \rangle_{L^2_\sigma} = \langle \mathcal{M}, f_1 \rangle_{L^2_\sigma} + \langle \mathcal{N}, f_1 \rangle_{L^2_\sigma}.$$

Pour le premier terme, en utilisant que $\mathcal{L}$ est symétrique par (12.14), puis que f_1 est une fonction propre par (12.16), et à nouveau la condition d'orthogonalité (12.24) on obtient

$$\langle \mathcal{L}q, f_1 \rangle_{L^2_\sigma} = \langle q, \mathcal{L}f_1 \rangle_{L^2_\sigma} = -\langle q, f_1 \rangle_{L^2_\sigma} = 0.$$

Pour le second terme, en injectant (12.15) dans (12.10), on calcule

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}, f_1 \rangle_{L^2_\sigma} &= \left\langle (\frac{\lambda_s}{\lambda} + \frac{1}{2}) \left(f_1 + 2q + \rho\partial_\rho q\right), f_1 \right\rangle_{L^2_\sigma} \\ &= (\frac{\lambda_s}{\lambda} + \frac{1}{2}) \left(\|f_1\|^2_{L^2_\sigma} + \langle 2q + \rho\partial_\rho q, f_1 \rangle\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\frac{\lambda_s}{\lambda}+\frac{1}{2})\left(\|f_1\|^2_{L^2_\sigma}+\langle 2q+\rho\partial_\rho q, f_1\rangle\right)=-\langle\mathcal{N}, f_1\rangle_{L^2_\sigma}$$

ce qui démontre (12.25).

□

CHAPTER 13

Stabilité de la solution auto-similaire fondamentale II : theorie spectrale de l'opérateur linéarisé

1. Éléments d'analyse spectrale

Cette section est consacrée à l'analyse spectrale générale, et s'applique donc à des opérateurs de Schrödinger généraux, autres que celui provenant de l'équation de Keller-Segel.

Dans toute cette section, H désigne un espace de Hilbert complexe, de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\| \cdot \|$. Un opérateur linéaire $\mathcal{T}$ dans H est une application linéaire d'un sous-espace $D(\mathcal{T}) \subset H$ (le domaine de $\mathcal{T}$) dans H. L'image de $\mathcal{T}$ est l'ensemble $Ran(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}x,\ x \in D(\mathcal{T})\}$. On dit que l'opérateur $\mathcal{T}$ est borné s'il existe $C > 0$ tel que $\|\mathcal{T}(x)\| \leq C\|x\|$ pour tout $x \in D(\mathcal{T})$. On étudie ici des opérateurs non bornés dans le sens où l'on ne suppose pas qu'ils sont bornés. On supposera de plus toujours que

$$D(\mathcal{T}) \text{ est dense dans } H.$$

1.1. Opérateurs auto-adjoints. Une classe d'opérateurs très naturelle est la suivante.

Definition 13.1 (Opérateur fermé). *Un opérateur $\mathcal{T}$ dans H est dit fermé si pour toute suite $x_n \in D(\mathcal{T})$ telle que x_n converge dans H vers un élément $x_\infty \in H$ et que $\mathcal{T}x_n$ converge dans H vers un élément $y_\infty \in H$, alors $x_\infty \in D(\mathcal{T})$ et $\mathcal{T}x_\infty = y_\infty$.*

Le graphe d'un opérateur $\mathcal{T}$ dans H est l'ensemble

$$Gr(\mathcal{T}) = \{(x, y) \in H \times H, \quad \text{tel que } x \in D(\mathcal{T}) \text{ et } y = \mathcal{T}(y)\}.$$

On équipe $H \times H$ de la structure hilbertienne associée au produit scalaire

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_{H\times H} = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle,$$

et à la norme suivante

$$\|(x, y)\|_{H\times H} = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Lemme 13.1. *Un opérateur $\mathcal{T}$ est fermé si et seulement si $Gr(\mathcal{T})$ est un sous-ensemble fermé de $H \times H$.*

Proof. La preuve fait l'objet de l'exercice **mettre ref**.

□

Definition 13.2 (Opérateur adjoint). *Si $\mathcal{T}$ est un opérateur dans H, alors l'opérateur adjoint $\mathcal{T}^*$ est défini comme suit. Son domaine est*

$$D(\mathcal{T}^*) = \{y \in H,\ \textit{tel qu'il existe } C > 0 \textit{ tel que } |\langle Tx, y \rangle| \leq C\|x\| \textit{ pour tout } x \in D(\mathcal{T})\},$$

c'est-à-dire, il consiste en l'ensemble des éléments $y \in H$ tel que l'application $x \mapsto \langle \mathcal{T}(x), y \rangle$ de $D(\mathcal{T})$ dans $\mathbb{C}$ est bornée pour la norme de H. Puisque $D(\mathcal{T})$ est dense dans H, cette application s'étend donc en une application linéaire continue de H dans $\mathbb{C}$.

Pour un tel y, par le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique $z \in H$ tel que cette application linéaire soit égale à $x \mapsto \langle x, z\rangle$, c'est-à-dire telle que

$$\langle \mathcal{T}(x), y\rangle = \langle x, z\rangle \tag{13.1}$$

pour tout $x \in D(\mathcal{T})$. L'opérateur adjoint est alors défini par $\mathcal{T}^*(y) = z$.

On remarque que par cette définition, si $x \in D(\mathcal{T}^*)$ alors on a pour tout $y \in D(\mathcal{T})$ que

$$\langle \mathcal{T}(y), x\rangle = \langle y, \mathcal{T}^*(x)\rangle. \tag{13.2}$$

comme conséquence directe de (13.1).

LEMME 13.2. *Montrer que $y \in \mathcal{D}(T^*)$ et $z = \mathcal{T}^*(y)$ si et seulement si $(-z, y) \in Gr(\mathcal{T})^\perp$ (où l'orthogonal et vis à vis du produit scalaire de $H \times H$).*

PROOF. La preuve fait l'objet de l'exercice **mettre ref**.

□

DEFINITION 13.3 (Opérateur auto-adjoint). *Soit $\mathcal{T}$ un opérateur quelconque. On dit que $\mathcal{T}$ est un opérateur auto-adjoint si $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$.*

En dimension finie, les opérateurs auto-adjoints sont exactement ceux qui sont symétriques, c'est-à-dire ceux représentés par une matrice hermitienne dans une base orthogonale, voir l'exercice 13.1. En dimension infinie en revanche, il existe des opérateurs qui sont symétriques et fermés, mais qui ne sont pas auto-adjoints, voir l'exercice 13.4. Il faut donc davantage d'informations pour déterminer si un opérateur est auto-adjoint ou non. La prochaine sous-section montrera que les opérateurs symétriques qui sont bornés par en bas possèdent toujours au moins une extension auto-adjointe dite extension de Friedrichs.

Nous terminons par mentionner un résultat de stabilité pour les opérateurs auto-adjoints.

PROPOSITION 13.1. *Soit $\mathcal{T}$ un opérateur auto-adjoint et injectif. Alors $Ran(\mathcal{T})$ est dense dans H et l'opérateur inverse $\mathcal{T}^{-1} : Ran(\mathcal{T}) \to H$ est également auto-adjoint.*

PROOF. Le domaine de $\mathcal{T}^{-1}$ est égal à l'image de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire $D(\mathcal{T}^{-1}) = Ran(\mathcal{T})$. Nous montrons en premier que ce domaine est dense. Cela équivaut à montrer que $Ran(\mathcal{T})^\perp = \{0\}$. Soit donc $u \in Ran(\mathcal{T})^\perp$. Alors $\langle u, Tv\rangle = 0$ pour tout $v \in D(\mathcal{T})$. L'application linéaire $v \mapsto \langle u, Tv\rangle$, de $D(\mathcal{T})$ dans $\mathbb{C}$, est donc égale à l'application nulle. Par définition de l'opérateur adjoint, cela signifie que $u \in D(\mathcal{T}^*)$ et $\mathcal{T}^*(u) = 0$. Or $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ est auto-adjoint. Donc $u \in D(\mathcal{T})$ et $\mathcal{T}(u) = 0$. Comme $\mathcal{T}$ est injectif, $u = 0$. Donc $Ran(\mathcal{T})^\perp = \{0\}$ et $Ran(\mathcal{T})$ est dense dans H.

Montrons maintenant que l'adjoint de $\mathcal{T}^{-1}$ est égal à $\mathcal{T}^{-1}$. Soit $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^{-1*})$ et $z = \mathcal{T}^{-1*}(y)$. Par le lemme 13.2 on a $(-z, y) \in Gr(\mathcal{T}^{-1})^\perp$. Or par définition de l'inverse le graphe de $\mathcal{T}^{-1}$ s'exprime aisément en fonction de celui de $\mathcal{T}$:

$$Gr(\mathcal{T}^{-1}) = \{(u, v) \in H \times H, \quad (v, u) \in Gr(\mathcal{T})\}.$$

Donc

$$(-z, y) \in \{(u, v) \in H \times H, \quad (v, u) \in Gr(\mathcal{T})\}^\perp.$$

Or

$$\{(u, v) \in H \times H, \quad (v, u) \in Gr(\mathcal{T})\}^\perp = \{(u, v), \quad (v, u) \in Gr(\mathcal{T})^\perp\}.$$

et donc $(y, -z) \in Gr(\mathcal{T})^\perp$. Par le lemme 13.2 à nouveau, cela signifie que $z \in D(\mathcal{T}^*)$ et $\mathcal{T}^*(z) = y$. Comme $\mathcal{T}$ est auto-adjoint, cela signifie que $z \in D(\mathcal{T})$ et $\mathcal{T}(z) = y$, soit $z = \mathcal{T}^{-1}(y)$.

On montre de la même manière que si $z = \mathcal{T}^{-1}(y)$ alors $y \in D(\mathcal{T}^{*-1})$ et $y = \mathcal{T}^{*-1}(y)$. Donc $\mathcal{T}^{-1*} = \mathcal{T}^{-1}$

□

1.2. Opérateurs associés à des formes bilinéaires. Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert H est une application $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \times D(\mathcal{B}) \to \mathbb{C}$ avec $D(\mathcal{B}) \subset H$ un ensemble qui est appelé le domaine de $\mathcal{B}$, et qui est antilinéaire par rapport à la première variable et linéaire par rapport à la seconde variable. Dans toute la section, nous supposerons pour toutes les formes bilinéaires que nous considérerons que

$$D(\mathcal{B}) \text{ est dense dans } H.$$

Une forme bilinéaire est dite bornée si elle est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que $|\mathcal{B}(u,v)| \leq C\|u\|_H \|v\|_H$ pour tous $u, v \in D(\mathcal{B})$. Par densité, toute forme bilinéaire continue s'étend en une forme bilinéaire sur l'espace entier $H \times H$. Nous identifierons donc les formes bilinéaires continues avec celles de domaine $H \times H$. Une forme bilinéaire est dite dite symétrique si $\mathcal{B}(u,v) = \overline{\mathcal{B}(v,u)}$. Elle est dite définie positive s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathcal{B}(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2$.

Definition 13.4. *Soit $\mathcal{B}$ une forme bilinéaire symétrique sur H. L'opérateur $\mathcal{T}$ associé à $\mathcal{B}$ est défini comme suit. Son domaine est*

$$D(\mathcal{T}) = \{y \in D(\mathcal{B}),\ \textit{tel qu'il existe } C > 0 \textit{ tel que } |B(x,y)| \leq C\|x\|_H \textit{ pour tout } x \in D(\mathcal{B})\},$$

c'est-à-dire, il consiste en l'ensemble des éléments $y \in H$ tel que l'application $x \mapsto \mathcal{B}(x,y)$ de $D(\mathcal{B})$ dans $\mathbb{C}$ est bornée pour la norme de H. Puisque $D(\mathcal{B})$ est dense dans H, cette application s'étend donc en une application linéaire continue de H dans $\mathbb{C}$.

Pour un tel y, par le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique $z \in X$ tel que cette application linéaire soit égale à $x \mapsto \langle x, z\rangle_H$, c'est-à-dire telle que

$$\mathcal{B}(x,y) = \langle x, z\rangle_H \tag{13.3}$$

pour tout $x \in D(\mathcal{B})$. L'opérateur $\mathcal{T}$ est alors défini par $\mathcal{T}(y) = z$.

On remarque que par cette définition, si $x \in D(\mathcal{T})$ alors on a pour tout $y \in D(\mathcal{B})$ que

$$\mathcal{B}(x,y) = \langle x, \mathcal{T}(y)\rangle_H \tag{13.4}$$

comme conséquence directe de (13.1). Puisque $\mathcal{B}$ est symétrique, on remarque que l'opérateur $\mathcal{T}$ est également symétrique.

Un conséquence du théorème classique de Lax-Milgram est le résultat suivant.

Proposition 13.2 (Lax-Milgram). *Soit $\mathcal{B}$ une forme bilinéaire symétrique continue et définie positive sur un espace de Hilbert H. Alors l'opérateur $\mathcal{T}$ associé à H est un isomorphisme sur H, et est auto-adjoint.*

Proof. **exercice**

□

Une généralisation très utile de ce résultat pour étudier des opérateurs auto-adjoints non bornés est la suivante.

Theoreme 13.1. *Soit G et H deux espaces de Hilbert tels que G s'injecte continument dans H (i.e. $G \subset H$ et $\|u\|_H \leq C\|u\|_G$ pour une constante $C > 0$) et que G est dense dans H. Soit $\mathcal{B}$ une forme bilinéaire symétrique, continue, et définie positive sur G. Soit $\mathcal{T}$ l'opérateur associé à $\mathcal{B}$, considérée comme une forme bilinéaire symétrique sur H. Alors :*

- *L'opérateur* $\mathcal{T} : D(\mathcal{T}) \to H$ *est bijectif, et* $\mathcal{T}^{-1}$ *est un opérateur continu de* H *vers* G *(et donc continu sur* H *également).*
- *Le domaine* $D(\mathcal{T})$ *est dense dans* H *pour la norme* $\| \cdot \|_H$*, et il est aussi dense dans* G *pour la norme* $\| \cdot \|_G$*.*
- *L'opérateur* $\mathcal{T}$ *est auto-adjoint sur* H*.*

PROOF. Soit $\mathcal{S}$ l'opérateur associé à la forme bilinéaire symétrique $\mathcal{B}$, considérée comme forme sur l'espace G. Alors par la proposition 13.2, $\mathcal{S} : G \to G$ est continu, bijectif, et auto-adjoint.

Preuve que $\mathcal{T}$ est bijectif et que $\mathcal{T}^{-1}$ est continu de H vers G. Soit $u \in D(\mathcal{T})$ tel que $\mathcal{T}(u) = 0$. Alors $0 = \langle u, \mathcal{T}(u) \rangle_H$. Donc $\mathcal{B}(u,u) = \langle u, \mathcal{T}(u) \rangle_H = 0$ et comme $\mathcal{B}(u,u) \geq \alpha \|u\|_G^2$ alors $u = 0$. Donc $\mathcal{T}$ est injectif.

Soit $f \in H$. Alors l'application linéaire $v \mapsto \langle f, v \rangle_H$ est continue sur G. Donc par le théorème de Riesz il existe $g \in G$ tel que $\langle f, v \rangle_H = \langle g, v \rangle_G$. Soit $u \in V$ tel que $\mathcal{S}(u) = g$. Alors $\langle g, v \rangle_G = \langle S(u), v \rangle_V = \mathcal{B}(u,v)$ pour tout $v \in V$. Donc $\langle f, v \rangle_H = \mathcal{B}(u,v)$ pour tout $v \in V$, et par définition $v \in D(\mathcal{T})$ et $\mathcal{T}(v) = f$. Donc $\mathcal{T}$ est surjectif, donc bijectif par le paragraphe ci-dessus, et on peut écrire $v = \mathcal{T}^{-1} f$. On que $\langle f, v \rangle_H = \mathcal{B}(v,v)$ avec $B(v,v) \geq \alpha \|v\|_G^2$ d'une part et $|\langle f, v \rangle_H| \leq \|f\|_H \|v\|_H \leq C \|f\|_H \|v\|_G$ d'autre part, et donc $\|v\|_G \leq C\alpha^{-1} \|f\|_H$. Donc $\mathcal{T}^{-1}$ est continu de H dans G.

Densité de $D(\mathcal{T})$. La densité de $D(\mathcal{T})$ dans H est équivalente à ce que son orthogonal dans H soit $\{0\}$. Soit donc $f \in H$ tel que $\langle f, u \rangle_H = 0$ pour tout $u \in D(\mathcal{T})$. Soit $v = \mathcal{T}^{-1}(f)$. Alors $0 = \langle f, u \rangle_H = \mathcal{B}(v,u)$ pour tout $u \in G$. Donc $\mathcal{B}(v,v) = 0$ et comme $B(v,v) \geq \alpha \|v\|_G^2$ alors $v = 0$. Donc $f = 0$, et $D(\mathcal{T})^\perp = \{0\}$ comme désiré.

Montrons de manière similaire que $D(\mathcal{T})$ est dense dans G. Soit donc $f \in G$ tel que $\langle f, u \rangle_G = 0$ pour tout $u \in D(\mathcal{T})$. Soit $v = \mathcal{S}^{-1}(f)$. Alors $0 = \langle f, u \rangle_G = \mathcal{B}(v,u)$ pour tout $u \in G$. Donc de même $f = 0$.

Auto-adjonction de T. Soit $v \in D(\mathcal{T}^*)$, alors $\langle \mathcal{T}u, v \rangle_H = \langle u, \mathcal{T}^* v \rangle_H$ pour tout $u \in D(\mathcal{T})$ par définition. Soit $w = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}^* v)$. Donc $\mathcal{T}w = \mathcal{T}^* v$. Pour tout $u \in D(\mathcal{T})$, comme $\mathcal{B}(u,w) = \langle \mathcal{T}u, w \rangle_H$ et $\mathcal{B}(u,w) = \langle u, \mathcal{T}w \rangle_H = \langle u, \mathcal{T}^* v \rangle_H$, alors $\langle \mathcal{T}u, v \rangle_H = \langle \mathcal{T}u, w \rangle_H$. En prenant $u = \mathcal{T}^{-1}(v - w)$ il vient $\|(v-w)\|_H^2 = 0$, donc $v = w$ et $\mathcal{T}^* v = \mathcal{T}w$.

□

1.3. Extension auto-adjointe de Friedrichs.

DEFINITION 13.5. *Un opérateur* T *est dit borné par le bas s'il existe* $C > 0$ *tel que* $\langle T(u), u \rangle_H \geq -C \|u\|_H^2$ *pour tout* $u \in D(T)$*.*

Si T est un opérateur symétrique est borné par le bas, on va obtenir une extension auto-adjointe de T comme suit.

On définit pour $K > C$ l'opérateur $T_K = T + K\mathrm{Id}$ de même domaine que T, et la forme bilinéaire $B_K(u,v) = \langle Tu + Ku, v \rangle_H$. Puisque $B_K(u,u) \geq \beta \|u\|_H^2$ pour $\beta = K - C > 0$, la forme B_K est un produit scalaire sur $D(T)$.

Soit alors G l'espace de Hilbert obtenu par complétion de $D(T)$ pour ce produit scalaire. On a $G \subset H$ car $\|u\|_H^2 \leq \beta^{-1} B_K(u,u)$. On note $\mathcal{B}_K$ l'extension de B_K à G, qui est par définition continue, symétrique, et définie positive sur G. Soit $\mathcal{T}_K$ l'opérateur associé à la forme $\mathcal{B}_K$ sur H. Alors par le théorème 13.1, $\mathcal{T}_K$ est auto-adjoint. On pose alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_K - K\mathrm{Id}$, de domaine le même domaine que $\mathcal{T}_K$.

THEOREME 13.2 (Extension de Friedrichs). *Soit* T *un opérateur symétrique borné par le bas. Alors l'opérateur* $\mathcal{T}$ *ainsi obtenu est indépendant du choix de* K*.*

Il est une extension de T, et il est auto-adjoint. Cet opérateur est appelé l'extension de Friedrichs de T.

PROOF. Pour $K, K' > C$ on a $B_K(u,u) \geq \beta\|u\|_H^2$ et $B_{K'}(u,u) \geq \gamma\|u\|_H^2$ pour $\beta = K - C > 0$ et $\gamma = K' - C > 0$. Comme $B_K(u,u) - B_{K'}(u,u) + (K-K')\|u\|_H^2$, alors $B_K(u,u) \leq (1 + \frac{|K-K'|}{\gamma})B_{K'}(u,u)$ et $B_{K'}(u,u) \leq (1+\frac{|K-K'|}{\beta})B_K(u,u)$. Donc les produits scalaires associés à B_K et $B_{K'}$ sont équivalents. Donc l'espace G obtenu par complétion est le même et ne dépend pas de K.

Montrons maintenant que $\mathcal{T}_{K'} - K'\mathrm{Id} = \mathcal{T}_\mathrm{K} - \mathrm{KId}$. Cela démontrera que $\mathcal{T}$ ne dépend pas de K. Soit $u \in D(\mathcal{T}_K)$ alors $B_K(u,v) = \langle \mathcal{T}_K u, v\rangle_H$ pour tout $v \in G$. Donc $\mathcal{B}_{K'}(u,v) = \mathcal{B}_{K'}(u,v) + (K'-K)\langle u,v\rangle_H = \langle \mathcal{T}_K + (K'-K)u, v\rangle_H$ pour tout $v \in G$. Donc par définition $u \in D(\mathcal{T}_{K'})$ et $\mathcal{T}_{K'}u = \mathcal{T}_K + (K'-K)u$. Par un raisonnement analogue, si $u \in D(\mathcal{T}_{K'})$ alors $u \in D(\mathcal{T}_K)$ et $\mathcal{T}_K u = \mathcal{T}_K + (K-K')u$. Donc $\mathcal{T}_{K'} = \mathcal{T}_K + (K'-K)\mathrm{Id}$ ce qui implique le résultat désiré.

Enfin, par définition, comme $\mathcal{T}_K$ est une extension de $T_K = T + K\mathrm{Id}$, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_K - K\mathrm{Id}$ est une extension de T.

□

1.4. Résolution spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts. On rappelle que α est une valeur propre de $\mathcal{T}$ s'il existe $x \in D(\mathcal{T})$ non nul tel que $\mathcal{T}x = \alpha x$.

DEFINITION 13.6 (Ensemble resolvant, spectre, spectre ponctuel). *L'ensemble résolvant $Res(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ est constitué des nombres complexes z pour lesquels l'opérateur $\mathcal{T} - z\mathrm{Id} : D(\mathcal{T}) \to H$ est une bijection dont l'inverse $(\mathcal{T} - z\mathrm{Id})^{-1}$ est un opérateur borné sur H.*

Le spectre $Spec(\mathcal{T})$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant : $Spec(\mathcal{T}) = \mathbb{C}\backslash Res(\mathcal{T})$.

Le spectre ponctuel est l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{T}$.

PROPOSITION 13.3. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur H. Alors $Spec(T) \subset (\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:*

$$\|T - z\mathrm{Id}\|_{L(H)} \leq \frac{1}{|\Im z|}.$$

PROOF. Exercice

□

Soit $B(0,1)$ la boule unité de H. Un opérateur est dit compact si $D(\mathcal{T}) = H$ et si $\mathcal{T}(B(0,1))$ est compact dans H.

THEOREME 13.3 (Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts). *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, et $\mathcal{T}$ un opérateur compact et auto-adjoint sur H. Alors il existe $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels convergent vers 0 (des répétitions dans la suite étant permises) et une base orthonormale $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de H constituée de fonctions propres associées :*

$$\mathcal{T} f_n = \alpha_n f_n.$$

On dit qu'un opérateur $\mathcal{T}$ est à résolvante compacte s'il existe $\alpha \in Res(\mathcal{T})$ tel que l'opérateur $(\mathcal{T} - \alpha\mathrm{Id})^{-1}$ soit compact.

COROLLAIRE 13.1. *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, et $\mathcal{T}$ un opérateur auto-adjoint sur H et à résolvante compacte. Alors il existe $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels telle que $|\alpha_n| \to \infty$ quand $n \to \infty$ (des répétitions dans la* *suite étant permises) et une base orthonormale $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de H constituée de fonctions propres associées :*

$$\mathcal{T} f_n = \alpha_n f_n.$$

PREUVE DU COROLLAIRE. C'est une conséquence du théorème précédent et de la proposition 13.1.

□

2. Analyse spectrale du linéarisé près du profil auto-similaire

Dans cette section nous étudions en détail l'opérateur

$$\mathcal{L}q = -\partial_{\rho\rho}q - \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho q + (\frac{\rho}{2} - \rho\varphi)\partial_\rho q + (1 - \rho\partial_\rho\varphi - 2n\varphi)q. \tag{13.5}$$

Nous allons nous intéresser en détail à sa propriété d'auto-adjonction et à son spectre.

On introduit les espaces de Sobolev H^1_σ et H^2_σ associés aux normes

$$\|q\|_{H^1_\sigma} = \|q\|_{L^2_\sigma} + \|\partial_\rho q\|_{L^2_\sigma}$$
$$\|q\|_{H^2_\sigma} = \|q\|_{L^2_\sigma} + \|\partial_\rho q\|_{L^2_\sigma} + \|\partial_{\rho\rho} q + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho q\|_{L^2_\sigma}$$

2.1. Analyse fonctionnelle dans L^2_σ.

LEMME 13.1. *L'espace $\mathcal{C}^\infty_c$ est dense dans L^2_σ, H^1_σ et H^2_σ.*

PROOF. Nous nous contenterons de montrer la densité de $\mathcal{C}^\infty_c$ dans H^1_σ, les autres étant similaires. Soit $u \in H^1_\sigma$ et $\epsilon > 0$. Soit χ une fonction lisse localisante avec $\chi(\rho) = 1$ pour $\rho \leq 1$ et $\chi(\rho) = 0$ pour $\rho \geq 2$, et $0 \leq \chi \leq 1$. On pose $\chi_n(\rho) = \chi(\rho/n)$ et $u_n = \chi_n u$. Alors $u - u_n = u(1-\chi_n)$, et donc

$$\|u - u_n\|^2_{L^2_\sigma} = \int_0^\infty u^2(1-\chi_n)^2\sigma\rho^{n+1}d\rho \leq \int_n^\infty u^2\sigma\rho^{n+1}d\rho \to 0$$

lorsque $n \to \infty$ car $u \in L^2_\sigma$. En utilisant l'identité $\partial_\rho(u - u_n) = \partial_\rho u(1-\chi_n) + n^{-1}u\partial_\rho u\partial_\rho\chi(\rho/n)$ et une estimation similaire, on obtient que $\|\partial_\rho(u-u_n)\|_{L^2_\sigma} \to 0$. Donc il existe n_0 tel que $\|u - u_{n_0}\|_{H^1_\sigma} \leq \epsilon/2$. Comme $u_{n_0} \in H^1_0(\rho \leq 2n_0)$ et que $C^\infty_c(\rho \leq 2n_0)$ est dense dans $H^1_0(\rho \leq 2n_0)$, il existe une suite $v_k \in C^\infty_c(\rho \leq 2n_0)$ qui converge vers u_{n_0} dans $H^1_0(\rho \leq 2n_0)$. Comme il existe une constante $c_{n_0} > 0$ telle que $c_{n_0} \leq \sigma(\rho) \leq c^{-1}_{n_0}$ pour tout $0 \leq \rho \leq 2n_0$, alors v_k converge aussi vers u_{n_0} dans H^1_σ. Donc $\|v_{k_0} - u_{n_0}\|_{H^1_\sigma} \leq \epsilon/2$ pour un entier k_0. Ainsi, $v_{k_0} \in C^\infty_c$ satisfait $\|u - v_{k_0}\|_{H^1_\sigma} \leq \epsilon$. D'où la densité de $\mathcal{C}^\infty_c$ dans H^1_σ.

□

On rappelle que l'inégalité de Poincaré sur un ouvert borné assez régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'écrit $\int_\Omega u^2dx \leq C(\Omega)\int|\nabla u|^2dx$ pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$ pour une constante $C(\Omega) > 0$. Une inégalité similaire est valable dans H^1_σ.

LEMME 13.2 (Inégalité de type Poincaré dans H^1_σ). *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in H^1_\sigma$ de moyenne $m_u = (\int_0^\infty \sigma\rho^{n+1}d\rho)^{-1}\int_0^\infty u\sigma\rho^{n+1}d\rho$ on a $\rho u \in L^2_\sigma$ avec*

$$\int_0^\infty (1+\rho^2)\,|u - m_u|^2\,\sigma\rho^{n+1}d\rho \leq c\int_0^\infty |\partial_\rho u|^2\sigma\rho^{n+1}d\rho. \tag{13.6}$$

PROOF. **Étape 1**. *Preuve d'une inégalité similaire.* Nous affirmons qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $u\in H^1_\sigma$ avec $u(1)=0$ on a

$$\int_0^\infty (1+\rho^2)u^2\rho^{n+1}\sigma d\rho \leq C\int_0^\infty |\partial_\rho u|^2\rho^{n+1}\sigma d\rho. \tag{13.7}$$

En effet, soit $u\in C^\infty_c$ telle que $u(1)=0$. On pose $\omega(\rho)=\int_\rho^\infty \tilde\rho^{n+3}\sigma(\tilde\rho)d\tilde\rho$. On a en intégrant par parties

$$\int_1^\infty u^2\rho^{n+3}\sigma d\rho = -\int_1^\infty u^2\partial_\rho\omega d\rho = 2\int_1^\infty \omega(\rho)u\partial_\rho u d\rho. \tag{13.8}$$

Par (12.13) et (12.3) on a

$$\sigma(\tilde\rho) = \rho^4 e^{-\rho^2/4}/16 + O(\rho^2 e^{-\rho^2/4}) \tag{13.9}$$

lorsque $\rho\to\infty$. En utilisant que $\int_\rho^\infty \tilde\rho e^{-\tilde\rho^2/4}d\tilde\rho = 2e^{-\rho^2/4}$ et des intégrations par parties, on en déduit que $\omega(\rho)=\rho^{n+6}e^{-\rho^2/4}/8+O(\rho^{n+4}e^{-\rho^2/4})$ lorsque $\rho\to\infty$. Donc $\omega(\rho)/(\rho^{n+2}\sigma(\rho))\to 2$ lorsque $\rho\to\infty$. Donc il existe $C'>0$ tel que $\omega(\rho)\leq C'\rho^{n+2}\sigma(\rho)$ pour tout $\rho\in[1,\infty)$. Ainsi par Cauchy-Schwarz

$$\int_1^\infty \omega(\rho)u\partial_\rho u d\rho \leq C'\left(\int_1^\infty u^2\rho^{n+3}\sigma d\rho\right)^{\frac12}\left(\int_1^\infty |\partial_\rho u|^2\rho^{n+1}\sigma d\rho\right)^{\frac12}. \tag{13.10}$$

En combinant (13.8) et (13.10) il vient $\int_1^\infty u^2\rho^{n+3}\sigma d\rho \leq 4C'^2\int_1^\infty |\partial_\rho u|^2\rho^{n+1}\sigma d\rho$. Par l'inégalité de Poincaré dans $B(0,1)$ et puisque $u(1)=0$ on a $\int_0^1 u^2\rho^{n+1}\sigma d\rho \leq C''\int_0^1 |\partial_\rho u|^2\rho^{n+1}\sigma d\rho$. En combinant ces deux inégalités, on obtient (13.7).

Étape 2. *Preuve du résultat.* Soit maintenant $u\in H^1_\sigma$. On décompose $u-m_u = v+w$ avec $v=u-u(1)$ et $w=u(1)-m_u$. Alors $v(1)=0$ et $\partial_\rho v=\partial_\rho u$ donc par l'inégalité (13.7)

$$\int_0^\infty (1+\rho^2)v^2\rho^{n+1}\sigma d\rho \leq C'\int_0^\infty |\partial_\rho u|^2\rho^{n+1}\sigma d\rho. \tag{13.11}$$

Soit $\tilde\omega(\rho)=|\int_1^\rho \rho^{-n-1}\sigma^{-1}(\rho)d\rho|^{1/2}$. On vérifie par (13.9) que $\tilde\omega(\rho)\lesssim\rho^{-n/2}$ pour $\rho<1$ et $\tilde\omega(\rho)\lesssim \rho^{-n/2-3}e^{\rho^2/8}$ pour $\rho>1$, et donc $\int_0^\infty\tilde\omega(\rho)\rho^{n+1}\sigma(\rho)d\rho<\infty$. Comme $|u(\rho)-u(1)|=|\int_{\rho_0}^\rho \partial_\rho u|\leq \tilde\omega(\rho)(\int_0^\infty|\partial_\rho u|^2\rho^{n+1}\sigma d\rho)^{1/2}$ par Cauchy-Schwarz, on en déduit que $|m_u-u(1)|\leq C'''\int_0^\infty\tilde\omega\rho^{n+1}\sigma d\rho(\int_0^\infty|\partial_\rho u|^2\rho^{n+1}\sigma d\rho)^{1/2}$. Cette inégalité implique $\int_0^\infty(1+\rho^2)w^2\rho^{n+1}\sigma d\rho\leq C''''\int_0^\infty|\partial_\rho u|^2\rho^{n+1}\sigma d\rho$ ce qui, combiné avec (13.11), démontre (13.6).

□

LEMME 13.3. *L'injection de H^1_σ dans L^2_σ est compacte.*

PROOF. Soit u_n bornée dans la boule unité de H^1_σ. Nous allons montrer qu'une sous-suite converge dans L^2_σ, ce qui démontrera le résultat.

On a que m_{u_n} est une suite bornée (en utilisant Cauchy-Schwarz). Donc par (13.6), ρu_n est une suite bornée dans L^2_σ. En utilisant que $\mathbb{1}(\rho\geq k)|u_n|\leq k^{-1}\mathbb{1}(\rho\geq k)\rho|u_n|$, on en déduit que

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mathbb{1}(\rho\geq k)u_n\|_{L^2_\sigma}=0. \tag{13.12}$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $c_k>0$ tel que $c_k\leq\sigma(\rho)\leq c_k^{-1}$ pour tout $\rho\leq k$. Donc $\mathbb{1}(\rho\leq k)u_n$ est une suite bornée dans $H^1(\rho\leq k)$. Par injection compace de $H^1(\rho\leq k)$ dans $L^2(\rho\leq k)$, il existe une sous-suite $u_{\phi_k(n)}$ telle que $\mathbb{1}(\rho\leq k)u_{\phi_k(n)}$ converge dans L^2. Par extraction diagonale, il existe une sous-suite $u_{\phi(n)}$ et une fonction u_∞ telle que $\mathbb{1}(\rho \leq k)u_{\phi(n)}$ converge vers $\mathbb{1}(\rho \leq k)u_\infty$ dans L^2 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrons maintenant que $u_{\phi(n)}$ converge vers u_∞ dans L^2_σ. Par le lemme de Fatou, $\|\mathbb{1}(\rho \geq k)u_\infty\|_{L^2_\sigma} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbb{1}(\rho \geq k)u_{\phi(n)}\|_{L^2_\sigma}$. Donc $u_\infty \in L^2_\sigma$ d'une part, et d'autre part par (13.12) on a

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbb{1}(\rho \geq k)u_\infty\|_{L^2_\sigma} = 0. \tag{13.13}$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe par (13.12) et (13.13) k_0 tel que $\|\mathbb{1}(\rho \geq k_0)u_n\|_{L^2_\sigma} \leq \epsilon/3$ pour tout n et $\|\mathbb{1}(\rho \geq k_0)u_\infty\|_{L^2_\sigma} \leq \epsilon/3$. Comme $\mathbb{1}(\rho \leq k_0)u_{\phi(n)}$ converge vers $1(\rho \leq k_0)u_\infty$ dans L^2, il existe n_0 tel que $\|\mathbb{1}(\rho \leq k_0)(u_{\phi(n)} - u_\infty)\|_{L^2_\sigma} \leq \epsilon/3$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $\|u_n - u_\infty\|_{L^2_\sigma} \leq \epsilon$. Donc $u_{\phi(n)} \to u_\infty$ dans L^2_σ.

□

2.2. Auto-adjonction de $\mathcal{L}$. L'opérateur $\mathcal{L}$ est bien défini sur l'espace C^∞_c, et nous avons vu dans (12.14) qu'il est symétrique pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2_\sigma}$. Nous avons vu dans la section 1 qu'il existe un méthode naturelle, celle de Friedrichs, pour obtenir une extension auto-adjointe d'un opérateur. Pour appliquer cette méthode à $\mathcal{L}$, nous définissons $\mathcal{B} : H^1_\sigma \times H^1_\sigma \to \mathbb{C}$ la forme bilinéaire symétrique

$$\mathcal{B}(q_1,q_2) = \int_0^\infty \partial_\rho \overline{q_1}\partial_\rho q_2 \sigma\rho^{n+1}d\rho + \int_0^\infty (1-\rho\partial_\rho\varphi - 2n\varphi)\overline{q_1}q_2\sigma\rho^{n+1}d\rho.$$

Nous avons vu dans la preuve de (12.14) que

$$\mathcal{B}(q_1,q_2) = \langle \mathcal{L}q_1, q_2\rangle_{L^2_\sigma} \tag{13.14}$$

pour tous $q_1, q_2 \in C^\infty_c$. On a également

$$\mathcal{B}(q,q) = \int_0^\infty |\partial_\rho q|^2\sigma\rho^{n+1}d\rho + \int_0^\infty (1-\rho\partial_\rho\varphi - 2n\varphi)q^2\sigma\rho^{n+1}d\rho. \tag{13.15}$$

Nous allons vérifier dans la preuve de la proposition suivante que la procédure d'extension de Friedrichs s'applique bien. Nous verrons que le domaine de l'opérateur auto-adjoint ainsi obtenu n'est autre que H^2_σ.

Proposition 13.1 (Auto-adjonction). *Pour tout $u \in H^2_\sigma$ on a $\mathcal{L}u \in L^2_\sigma$. De plus, l'opérateur $\mathcal{L} : H^2_\sigma \to L^2_\sigma$ est un opérateur auto-adjoint.*

Proof. **Étape 1**. *Procédure d'extension de Friedrichs.* On considère l'opérateur $\mathcal{L} : C^\infty_c \to L^2_\sigma$ sur L^2_σ. Par (12.14), il est symétrique. Comme $\rho\partial_\rho\varphi$ et φ sont des fonctions bornées, on a que $1-\rho\partial_\rho\varphi - 2n\varphi \geq -C$ pour une constante $C > 0$. Donc par (13.14) et (13.15), on a pour $q \in C^\infty_c$ que

$$\langle \mathcal{L}q, q\rangle_{L^2_\sigma} \geq \int_0^\infty |\partial_\rho q|^2\sigma\rho^{n+1}d\rho - C\int_0^\infty q^2\sigma\rho^{n+1}d\rho \tag{13.16}$$

ce qui montre que $\mathcal{L}$ est un opérateur borné par le bas sur L^2_σ. Le théorème d'extension de Friedrichs 13.2 s'applique donc. Soit $\tilde{\mathcal{L}} : D(\tilde{\mathcal{L}}) \to L^2_\sigma$ l'opérateur auto-adjoint ainsi obtenu. Nous allons maintenant détailler la procédure d'extension dans le cas présent. Par (13.16), pour $K > 0$ suffisament grand, il existe $C_K > 0$ tel que

$$\frac{1}{C_K}\|u\|_{H^1_\sigma} \leq \mathcal{B}(u,u) + K\|u\|^2_{L^2_\sigma} \leq C_K\|u\|_{H^1_\sigma}.$$

Par l'inégalité ci-dessus, l'espace complété de C^∞_c pour le produit scalaire $\mathcal{B}(u,v) + K\langle u,v\rangle_{L^2_\sigma}$ est H^1_σ. Par ceci et par la définition 13.4, l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}$ est donc défini de la manière suivante :

$$D(\tilde{\mathcal{L}}) = \{u \in H^1_\sigma, \text{ tel qu'il existe } f \in L^2_\sigma \text{ tel que } \mathcal{B}(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2_\sigma} \text{ pour tout } v \in H^1_\sigma\}, \tag{13.17}$$

et $\tilde{\mathcal{L}}u = f$ où f est la fonction ci-dessus.

Étape 2. *Preuve que $\mathcal{L}q \in L^2_\sigma$ pour $q \in H^2_\sigma$.* Soit $q \in H^2_\sigma$. Nous affirmons que $\rho\partial_\rho q \in L^2_\sigma$. Si cela est démontré, alors chacun des termes dans (13.5) appartient à L^2_σ et donc cela montrera $\mathcal{L}q \in L^2_\sigma$ comme désiré. Comme $q \in H^2_\sigma$ on a $\partial_{\rho\rho}q + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho q \in L^2_\sigma$ et $\partial_\rho q \in L^2_\sigma$, donc $\partial_{\rho\rho}q \in L^2(\rho \geq 1)$. Soit χ une fonction lisse localisante avec $\chi(\rho) = 1$ pour $\rho \leq 1$ et $\chi(\rho) = 0$ pour $\rho \geq 2$ et $u = (1-\chi)\partial_\rho q$. Alors $\partial_\rho u = (1-\chi)\partial_{\rho\rho}q - \partial_\rho\chi\partial_\rho q \in L^2_\sigma$. Donc par le lemme 13.2 on a $\rho u \in L^2_\sigma$, ce qui implique bien $\rho\partial_\rho q \in L^2_\sigma$.

On conserve maintenant la notation $\mathcal{L}$ pour désigner l'opérateur $\mathcal{L} : H^2_\sigma \to L^2_\sigma$.

Étape 3. *Preuve que $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$.* Montrons d'abord que $\tilde{\mathcal{L}}$ est une extension de $\mathcal{L}$. Par l'étape 2, pour tout $q_1 \in H^2_\sigma$ on a $\mathcal{L}q_1 \in L^2_\sigma$ et par la densité de C^∞_c dans H^1_σ et H^2_σ du lemme 13.1, on obtient par (13.14) que

$$\mathcal{B}(q_1, q_2) = \langle \mathcal{L}q_1, q_2\rangle_{L^2_\sigma} \tag{13.18}$$

pour tous $q_2 \in H^1_\sigma$. Donc pour tout $q_1 \in H^2_\sigma$, l'identité ci-dessus et (13.17) montre que $q_1 \in D(\tilde{\mathcal{L}})$ et $\tilde{\mathcal{L}}q = \mathcal{L}q$. Donc $\tilde{\mathcal{L}}$ est une extension de $\mathcal{L}$.

Montrons ensuite que $\mathcal{L}$ est une extension de $\tilde{\mathcal{L}}$. Soit $u \in D(\tilde{\mathcal{L}})$ et $\tilde{\mathcal{L}}u = f \in L^2_\sigma$. Alors pour toutes fonctions test $\phi \in C^\infty_c((0,\infty))$ on a par (13.17), (13.5) et (13.18) que

$$\int_0^\infty f\phi\sigma\rho^{n+1}d\rho = \int_0^\infty u\sigma\rho^{n+1}(-\partial_{\rho\rho}\phi - \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho\phi + (\frac{\rho}{2} - \rho\varphi)\partial_\rho\phi + (1 - \rho\partial_\rho\varphi - 2n\varphi)\phi)d\rho. \tag{13.19}$$

On pose $v = u\sigma\rho^{n+1}$. L'identité (13.19) se réecrit

$$\partial_{\rho\rho}v = g, \qquad g = f\sigma\rho^{n+1} - [\frac{n+1}{\rho} + (\frac{\rho}{2} - \rho\varphi)]\partial_\rho(u\sigma\rho^{n+1}) + (1 - \rho\partial_\rho\varphi - 2n\varphi)\sigma\rho^{n+1} \tag{13.20}$$

au sens des distributions sur $(0,\infty)$. Soit $0 < \delta < R$. Alors $v \in H^1((\delta, R))$ puisque $u \in H^1_\sigma$. De plus, $g \in L^2((0,R))$ car $f \in L^2_\sigma$ et $u \in H^1_\sigma$. Donc $v \in H^2((\delta,R))$ et l'identité (13.20) est valable comme une égalité de fonctions mesurables. Puisque $v = u\sigma\rho^{n+1}$, on a que

$$\partial_{\rho\rho}u = \sigma\rho^{n+1}\partial_{\rho\rho}v - 2\sigma^{-1}\rho^{-n-1}\partial_\rho(\sigma\rho^{n+1})\partial_\rho u - \sigma^{-1}\rho^{-n-1}\partial_{\rho\rho}(\sigma\rho^{n+1})u$$

au sens des distributions. Par le même raisonnement, puisque $u \in H^1((\delta,R))$ et $\partial_{\rho\rho}v \in L^2((\delta,R))$ on en déduit que $u \in H^2((\delta,R))$ et que l'identité ci-dessus est valable en temps qu'égalité de fonctions mesurables. En combinant les identités ci-dessus, on a démontré que $u \in H^2((\delta,R))$ pour tous $0 < \delta < R$ avec l'identité

$$f = -\partial_{\rho\rho}u - \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho u + (\frac{\rho}{2} - \rho\varphi)\partial_\rho u + (1 - \rho\partial_\rho\varphi - 2n\varphi)u. \tag{13.21}$$

Comme $f, \partial_\rho u, u \in L^2_\sigma$, on en déduit que

$$\mathbb{1}(\rho \leq 1)(\partial_{\rho\rho}u + \frac{n+1}{\rho}\partial_\rho u) \in L^2_\sigma \tag{13.22}$$

et

$$\mathbb{1}(\rho \geq 1)(\partial_{\rho\rho}u - \frac{\rho}{2}\partial_\rho u) \in L^2_\sigma. \tag{13.23}$$

Soit χ une fonction lisse localisante avec $\chi(\rho)=1$ pour $\rho\leq 1$, $\chi(\rho)=0$ pour $\chi\geq 2$ et $0\leq\chi\leq 1$. Pour $R>1$ on pose $\chi_R(\rho)=\chi(\rho/R)$. En développant,

$$\int_1^\infty(\partial_{\rho\rho}u-\frac{\rho}{2}\partial_\rho u)^2\sigma\rho^{n+1}\chi_R d\rho=\int_1^\infty(\partial_{\rho\rho}u)^2\sigma\rho^{n+1}\chi_R d\rho+\frac14\int_1^\infty(\partial_\rho u)^2\sigma\chi_R\rho^{n+3}d\rho$$
$$-\int_1^\infty\partial_{\rho\rho}u\partial_\rho u\sigma\rho^{n+2}\chi_R d\rho.$$

En intégrant par parties, et en utilisant $\sigma=\varphi^{-2}e^{-\rho^2/4}$:

$$2\int_1^\infty\partial_{\rho\rho}u\partial_\rho u\sigma\rho^{n+2}\chi_R d\rho=-(\partial_\rho u(1))^2\sigma(1)+\frac12\int_1^\infty(\partial_\rho u)^2\sigma\rho^{n+3}\chi_R d\rho$$
$$-\int_1^\infty(\partial_\rho u)^2e^{-\rho^2/4}\partial_\rho(\rho^{n+2}\varphi^{-2}\chi_R)d\rho.$$

En combinant ces deux identités,

$$\int_1^\infty(\partial_{\rho\rho}u)^2\sigma\rho^{n+1}\chi_R d\rho=\int_1^\infty(\partial_{\rho\rho}u-\frac{\rho}{2}\partial_\rho u)^2\sigma\rho^{n+1}\chi_R d\rho-\frac12(\partial_\rho u(1))^2\sigma(1)$$
$$-\frac12\int_1^\infty(\partial_\rho u)^2e^{-\rho^2/4}\partial_\rho(\rho^{n+2}\varphi^{-2}\chi_R)d\rho$$

Par (13.23) la première intégrale du membre de droite est uniformément bornée pour tout $R>1$. Puisque $u\in H^2((\delta,R))$ pour tout $0<\delta<R$, alors $\partial_\rho u$ est une fonction continue par injection de Sobolev. Donc le second terme du membre de droite impliquant $(\partial_\rho u(1))^2$ est une quantité bien définie. Enfin, on a par un calcul explicite que $|\partial_\rho(\rho^{n+2}\varphi^{-2}\chi_R|\lesssim\rho^{n+1}\varphi^{-2}$. Donc comme $u\in H^1_\sigma$ la dernière intégrale est uniformément bornée pour tout $R>1$. Donc $\int_1^\infty(\partial_{\rho\rho}u)^2\sigma\rho^{n+1}\chi_R d\rho$ est uniformément borné en R. En prenant $R\to\infty$ il vient $\mathbb{1}(\rho\geq 1)\partial_{\rho\rho}u\in L^2_\sigma$. Donc

$$\mathbb{1}(\rho\geq 1)(\partial_{\rho\rho}u+\frac{n+1}{\rho}\partial_\rho u)\in L^2_\sigma. \tag{13.24}$$

En combinant (13.24) avec (13.22) il vient $\partial_{\rho\rho}u+\frac{n+1}{\rho}\partial_\rho u\in L^2_\sigma$. Donc $u\in H^2_\sigma$. L'identité (13.21) montre alors $\mathcal{L}u=f=\tilde{\mathcal{L}}u$. Donc $\mathcal{L}u$ est une extension de $\tilde{\mathcal{L}}u$.

□

PROPOSITION 13.2 (Diagonalisation). *L'opérateur $\mathcal{L}:H^2_\sigma\to L^2_\sigma$ est à résolvante compacte. Il existe une suite de valeurs propres $\alpha_1<\alpha_1<...$ et de fonctions propres $(f_i)_{i\geq1}\in H^2_\sigma$ associées telles que*

$$\mathcal{L}f_i=\alpha_i f_i$$

et telles que les f_i sont deux à deux orthogonales dans L^2_σ et que $\mathrm{Vect}(\{f_i\}_{i\geq1})$ *est dense dans L^2_σ.*

PROOF. Par l'inégalité (13.16) et (13.18) on a pour $K>C+1$ que

$$\langle(\mathcal{L}+K\mathrm{Id})\mathrm{q},\mathrm{q}\rangle_{\mathrm{L}^2_\sigma}\geq\int_0^\infty|\partial_\rho\mathrm{q}|^2\sigma\rho^{\mathrm{n}+1}\mathrm{d}\rho+(\mathrm{K}-\mathrm{C})\int_0^\infty\mathrm{q}^2\sigma\rho^{\mathrm{n}+1}\mathrm{d}\rho\geq\|\mathrm{q}\|_{\mathrm{H}^1_\sigma}.$$

On remarque que puisque $\mathcal{L}$ est l'opérateur associé à la forme bilinéaire $\mathcal{B}$ sur L^2_σ de domaine H^1_σ, alors $\mathcal{L}+K\mathrm{Id}$ est l'opérateur associé à la forme bilinéaire $\mathcal{B}+K\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2_\sigma}$ sur L^2_σ de domaine H^1_σ. L'inégalité ci-dessus montre que celle-ci est coercive. Donc par le théorème 13.1, l'opérateur $\mathcal{L}+K\mathrm{Id}:\mathrm{H}^2_\sigma\to\mathrm{L}^2_\sigma$ est inversible, et son opérateur inverse $(L+K\mathrm{Id})^{-1}$ est continu de L^2_σ dans H^1_σ. Puisque l'injection de H^1_σ dans L^2_σ est compacte par le lemme 13.3, alors $(L+K\mathrm{Id})^{-1}$ est un opérateur compact. Donc $\mathcal{L}$ est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte.

Par le corollaire 13.1, il existe $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ avec $|\alpha_n| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et $f_n \in H^2_\sigma$ une suite de fonctions deux à deux orthogonales dans L^2_σ qui sont des fonctions propres associées,

$$\mathcal{L} f_n = \alpha_n f_n,$$

avec $Vect(f_n)$ dense dans L^2_σ. Puisque

$$\begin{aligned}
\alpha_n \|f_n\|^2_{L^2_\sigma} &= \langle \mathcal{L} f_n, f_n \rangle_{L^2_\sigma} \\
&= \mathcal{B}(f_n, f_n) \\
&= \int_0^\infty (\partial_\rho f_n)^2 \sigma \rho^{n+1} d\rho + \int_0^\infty (1 - \rho\partial_\rho \varphi - 2n\varphi) f_n^2 \sigma \rho^{n+1} d\rho \\
&\geq \int_0^\infty (1 - \rho\partial_\rho \varphi - 2n\varphi) f_n^2 \sigma \rho^{n+1} d\rho \\
&\geq \|(1 - \rho\partial_\rho \varphi - 2n\varphi)\|_{L^\infty} \|f_n\|^2_{L^2_\sigma}
\end{aligned}$$

alors $\alpha_n \geq \|(1-\rho\partial_\rho\varphi - 2n\varphi)\|_{L^\infty}$. Comme $|\alpha_n| \to \infty$ alors nécéssairement $\alpha_n \to \infty$. □

2.3. Positivité de la seconde valeur propre.

PROPOSITION 13.3. *On garde les notations de la proposition 13.2. Pour tout* $i \geq 2$ *on a*

$$\alpha_i > 0.$$

PROOF. Cette démonstration n'est pas simple, elle repose sur une estimation fine du nombre de valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger associé à $\mathcal{L}$ effectuée dans le travail récent de Birgit Schörkhuber et Irfan Glocic. □

COROLLAIRE 13.1. *Il existe* $\kappa > 0$ *tel que pour tout* $q \in H^1_\sigma$, *si*

$$\langle q, f_1 \rangle = 0$$

alors

$$\mathcal{B}(q) \geq \kappa \|q\|^2_{H^1_\sigma}$$

PROOF. □

COROLLAIRE 13.2 (Décroissance de l'évolution linéaire). *On garde les notations du corollaire précédent, et on suppose que* $(s, \rho) \mapsto q(s, \rho)$ *est une fonction bornée, de dérivées jusquà l'ordre deux bornées, qui est une solution de*

$$\partial_s q + \mathcal{L} q = 0$$

avec

$$\langle q(0, \cdot), f_1 \rangle = 0.$$

Alors

$$\|q(s, \cdot)\|_{L^2_\sigma} \leq e^{-\kappa} \|q(0, \cdot)\|_{L^2_\sigma}$$

PROOF. □

2.4. Explosion et convergence asymptotique pour les solutions piégées. En combinant les techniques de modulation de la section précédente et l'analyse de l'opérateur linéarisé de cette section, le theoreme ci-dessous démontre que si une solution reste piégée sur son intervalle d'existence, alors celle-ci explose en temps fini et converge localement vers le profil auto-similaire.

THEOREME 13.1. *Pour $\delta > 0$ assez petit ce qui suit est vrai. Soit u une solution du système de Keller-Segel sur $[0, T_{max})$, qui est C^∞ et dont les dérivées sont à chaque instant bornées en espace, et qui est piégée autour de l'ensemble des profils auto-similaires sur $[0, T_{max})$ au sens de la définition 12.1. Alors :*

- *La solution explose en temps fini, $T_{max} < \infty$.*
- *La masse partielle de la solution se décompose sous la forme*
$$m(t,r) = \frac{1}{\lambda(t)^2}(\varphi + q)(\frac{r}{\lambda(t)})$$
avec une échelle spatiale qui est asymptotiquement parabolique
$$\frac{\lambda(t)}{\sqrt{T_{max} - t}} \to 1$$
et une perturbation qui converge vers 0 à cet échelle :
$$\|q(t)\|_{L^2_\sigma} \to 0$$
lorsque $t \uparrow T_{max}$.

Il a été démontré récemment par Glocic et Schorkhuber que pour toute donnée initiale de la forme $u_0 = \Psi + \tilde{u}_0$, avec $\tilde{u}_0$ suffisamment régulière et petite dans certaines normes bien choisies, alors la solution du système de Keller-Segel explose en temps fini et satisfait les mêmes conclusions que le théorème ci-dessus. Dans ce cours nous aurons donc entrevu comment obtenir un tel résultat. Nous avons pu décrire le comportement des solutions piégées, et pour démontrer ce résultat de Glocic et Schorkhuber il manque un ingrédient de preuve en plus : démontrer que la solution reste piégée sur son intervalle maximal d'existence.

PROOF. La preuve repose sur une utilisation conjointe de l'équation de modulation pour λ, et d'une estimation d'énergie pour q permises par les propriétés spectrales de l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$. Dans ce qui suit $A \lesssim B$ signifie que $A \leq CB$ pour une constante $C > 0$ qui peut varier d'une ligne à l'autre mais qui est indépendante des paramètres en jeu.

Étape 1. *Controle de l'équation de modulation.* Montrons qu'il existe $C > 0$ telle que
$$\left|\frac{\lambda_s}{\lambda} + \frac{1}{2}\right| \leq C \min(\delta^2, \delta\|q\|_{L^2_\sigma}). \tag{13.25}$$
On rappelle par (12.25) que
$$\left|\frac{\lambda_s}{\lambda} + \frac{1}{2}\right| \leq \left|\frac{\langle \mathcal{N}(q), f_1\rangle_{L^2_\sigma}}{\|f_1\|^2_{L^2_\sigma} + \langle 2q + \rho\partial_\rho q, f_1\rangle_{L^2_\sigma}}\right|. \tag{13.26}$$
On calcule en intégrant par parties, puis en utilisant (12.23) et que le poids σ décroit exponentiellement vite :
$$|\langle 2q + \rho\partial_\rho q, f_1\rangle_{L^2_\sigma}| = \left|\int_0^\infty 2qf_1\sigma\rho^{n+1}d\rho - \int_0^\infty q\partial_\rho(\rho f_1\sigma\rho^{n+1})d\rho\right| \leq C\delta.$$

Pour δ assez petit on a donc par (13.26) :

$$\left|\frac{\lambda_s}{\lambda}+\frac{1}{2}\right| \lesssim |\langle \mathcal{N}(q), f_1\rangle_{L^2_\sigma}|$$

On calcule ensuite que

$$\langle \mathcal{N}(q), f_1\rangle_{L^2_\sigma} = \langle nq^2, f_1\rangle_{L^2_\sigma} + \langle \rho q\partial_\rho q, f_1\rangle_{L^2_\sigma}$$

En utilisant (12.23) le premier terme se majore par

$$|\langle nq^2, f_1\rangle_{L^2_\sigma}| \lesssim \|q\|^2_{L^\infty} \lesssim \delta^2.$$

En utilisant (12.23) puis Cauchy-Schwarz on peut aussi le majorer par :

$$|\langle nq^2, f_1\rangle_{L^2_\sigma}| \leq \|q\|_{L^\infty} \int |nqf_1\sigma\rho^{n+1}|d\rho \lesssim \delta\|q\|_{L^2_\sigma}\|nf_1\|_{L^2\sigma} \lesssim \delta\|q\|_{L^2_\sigma}$$

En combinant les deux majorations possibles :

$$|\langle nq^2, f_1\rangle_{L^2_\sigma}| \lesssim \min(\delta^2, \delta\|q\|_{L^2_\sigma})$$

Le deuxième terme s'écrit après une intégration par parties :

$$\langle \rho q\partial_\rho q, f_1\rangle_{L^2_\sigma} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho^2\partial_\rho(f_1\sigma\rho^{n+1})d\rho.$$

Il peut alors être estimé de la même manière que le premier : $|\langle \rho q\partial_\rho q, f_1\rangle_{L^2_\sigma}| \lesssim \min(\delta^2, \delta\|q\|_{L^2_\sigma})$. Cela démontre (13.25).

Étape 2. *Estimation d'énergie pour l'erreur.* Montrons qu'il existe $\eta > 0$ telle que

$$\frac{d}{ds}\|q\|_{L^2_\sigma} \leq -\frac{\kappa}{2}\|q\|_{L^2_\sigma}. \tag{13.27}$$

En effet, on calcule par (12.8) :

$$\frac{d}{ds}\|q\|^2_{L^2_\sigma} = -2\mathcal{B}(q,q) + 2\left\langle q, \mathcal{M}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda}, q\right)\right\rangle + 2\langle \mathcal{N}(q)\rangle.$$

Par le corollaire 13.1 le premier terme est

$$-2\mathcal{B}(q,q) \leq -2\kappa\|q\|^2_{H^1_\sigma}.$$

Nous allons maintenant montrer que les deuxièmes et troisièmes termes sont bien plus petits. Le deuxième terme est

$$\left\langle q, \mathcal{M}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda}, q\right)\right\rangle = (\frac{\lambda_s}{\lambda}+\frac{1}{2})\langle q, f_1 + 2q + \rho\partial_\rho q\rangle.$$

En utilisant que q est orthogonal à f_1 et l'estimation (13.25) de l'étape 1 sur la modulation :

$$\left|\left\langle q, \mathcal{M}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda}, q\right)\right\rangle\right| \lesssim \delta^2|\langle q, 2q + \rho\partial_\rho q\rangle|$$

On a par (**??**) : $|\langle q, 2q+\rho\partial_\rho q\rangle| \lesssim \|q\|^2_{H^1_\sigma}$ et donc

$$\left|\left\langle q, \mathcal{M}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda}, q\right)\right\rangle\right| \lesssim \delta^2\|q\|^2_{H^1_\sigma}.$$

Pour le troisième terme on a par (12.23) puis Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|\langle q, \mathcal{N}\rangle| &= \left|\int_0^\infty (nq^2 + \rho q\partial_\rho q)q\sigma\rho^{n+1}d\rho\right| \leq \|q\|_{L^\infty}\left|\int_0^\infty (|nq| + \rho|\partial_\rho q|)|q|\sigma\rho^{n+1}d\rho\right| \\ &\lesssim \delta\|q\|^2_{H^1_\sigma}.\end{aligned}$$

Donc pour δ assez petit,

$$\left|2\left\langle q, \mathcal{M}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda}, q\right)\right\rangle + 2\langle \mathcal{N}(q)\rangle\right| \leq \kappa \|q\|^2_{H^1_\sigma}.$$

Ainsi, $\frac{d}{ds}\|q\|^2_{L^2_\sigma} \leq -\kappa\|q\|^2_{H^1_\sigma} \leq -\kappa\|q\|^2_{L^2_\sigma}$ ce qui implique (13.27).

Étape 3. *Fin de la preuve.* L'inégalité de décroissance (13.27) implique

$$\|q(s)\|_{L^2_\sigma} \leq e^{-\frac{\kappa}{2}s}\|q(0)\|_{L^2_\sigma}.$$

En injectant cette inégalité dans (13.25) on obtient

$$|\frac{d}{ds}\log(\lambda e^{s/2})| \lesssim e^{-\frac{\kappa}{2}s}.$$

Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\log(\lambda e^{s/2}) = K + O(e^{-\frac{\kappa}{2}s})$ lorsque $s \to \infty$, et ainsi $\lambda = K' e^{-s/2}(1 + O(e^{-\kappa s/2}))$ pour $K' = e^K$. Puisque $\frac{dt}{ds} = \lambda^2$ on a $\frac{dt}{ds} = K'^2 e^{-s}(1 + O(e^{-\kappa s/2}))$. Il existe donc $T > 0$ tel que $\lim_{s\to\infty} t(s) = T$ et $t = T - K'^2 e^{-s} + O(e^{-(1+\frac{\kappa}{2})s})$. Donc $K'^2 e^{-s} = T - t + O((T-t)^{1+\frac{\kappa}{2}})$. Ainsi,

$$\lambda = \sqrt{T-t} + O((T-t)^{\frac{1}{2}+\frac{\kappa}{4}}).$$

Cette inégalité et celle sur q démontre le théorème.

□

3. Exercices

EXERCICE 13.1. *Soit $H = \mathbb{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'un opérateur est auto-adjoint sur H si et seulement si il est symétrique.*

EXERCICE 13.2. *Soit $\mathcal{T}$ un opérateur fermé. Montrer que $\mathcal{T}$ est un opérateur symétrique si et seulement si $D(\mathcal{T}) \subset D(\mathcal{T}^*)$ et $\mathcal{T}u = \mathcal{T}^*u$ pour tout $u \in D(\mathcal{T})$.*

EXERCICE 13.3. *Soit $\mathcal{T}$ un opérateur fermé sur un Hilbert H. Montrer que son adjoint $\mathcal{T}^*$ est un opérateur fermé.*

EXERCICE 13.4. *On se place dans l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$. Soit l'opérateur $\mathcal{T}(u) = u''$ de domaine $D(\mathcal{T}) = \{u \in H^2([0,1]),\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est un opérateur symétrique et fermé. Montrer que son adjoint a pour domaine l'espace $H^2([0,1])$ et que $\mathcal{T}^*(u) = u''$. En déduire que $\mathcal{T}$ n'est pas auto-adjoint.*

EXERCICE 13.5. *Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}$ l'opérateur sur H défini par $D(\mathcal{T}) = H^1(\mathbb{R})$ ($H^1(\mathbb{R})$ désignant ici l'espace de Sobolev usuel) et $\mathcal{T}(f) = \partial_x f$. Montrer que $\mathcal{T}$ est un opérateur fermé.*

EXERCICE 13.6. *Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}$ l'opérateur sur H défini par $D(\mathcal{T}) = H^2(\mathbb{R})$ ($H^2(\mathbb{R})$ désignant l'espace de Sobolev usuel) et $\mathcal{T}(f) = -\partial_{xx} f$. Montrer que $\mathcal{T}$ est un opérateur auto-adjoint.*

EXERCICE 13.7.
- *Montrer que si H est de dimension finie, alors le spectre de $\mathcal{T}$ est égal au spectre ponctuel. (La distinction entre le spectre et le spectre ponctuel n'est donc intéressante qu'en dimension infinie.)*
- *Trouver un exemple d'opérateur pour lequel le spectre n'est pas égal au spectre ponctuel. (Par la question précédente, nécessairement H doit être de dimension infinie).*

EXERCICE 13.8.

- *Montrer que tout opérateur compact sur H est un opérateur continu sur H.*
- *Montrer que si H est de dimension finie, un opérateur est compact si et seulement si c'est un opérateur continu. (La distinction entre opérateurs continus et compacts n'est donc intéressante qu'en dimension infinie).*
- *Trouver un exemple d'opérateur qui soit continu mais pas compact. (Par la question précédente, nécéssairement H doit être de dimension infinie).*